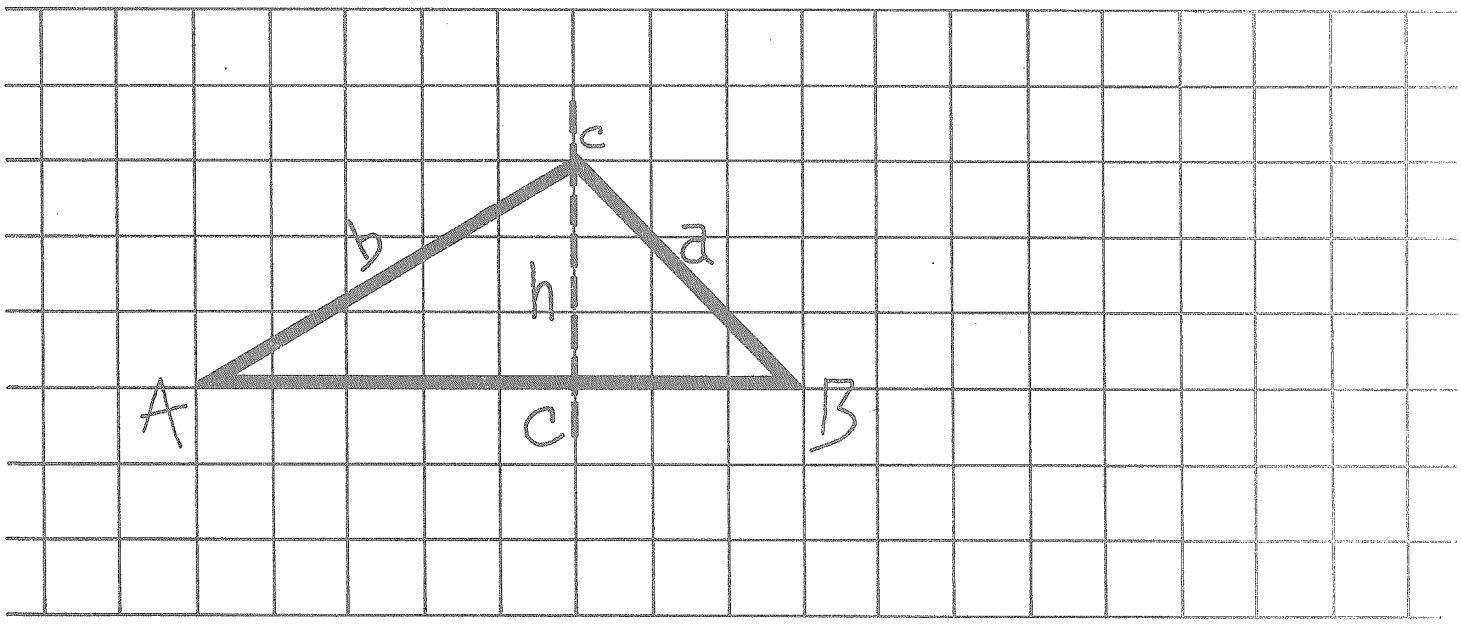
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. ***Resolución de triángulos cualesquiera***
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 5

Trigonometría

Módulo 7

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0846-6

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memor*ia, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedara dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

7.1 Ley de los senos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera dadas las medidas de un lado y dos ángulos interiores 9

7.2 Ley de los senos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos 28

7.3 Ley de los cosenos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido 40

7.4 Aplicación de la ley de los cosenos a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de los tres lados 53

7.5 Resolución de triángulos cualesquiera. Resumen 58

7.6 Área de una región triangular 67

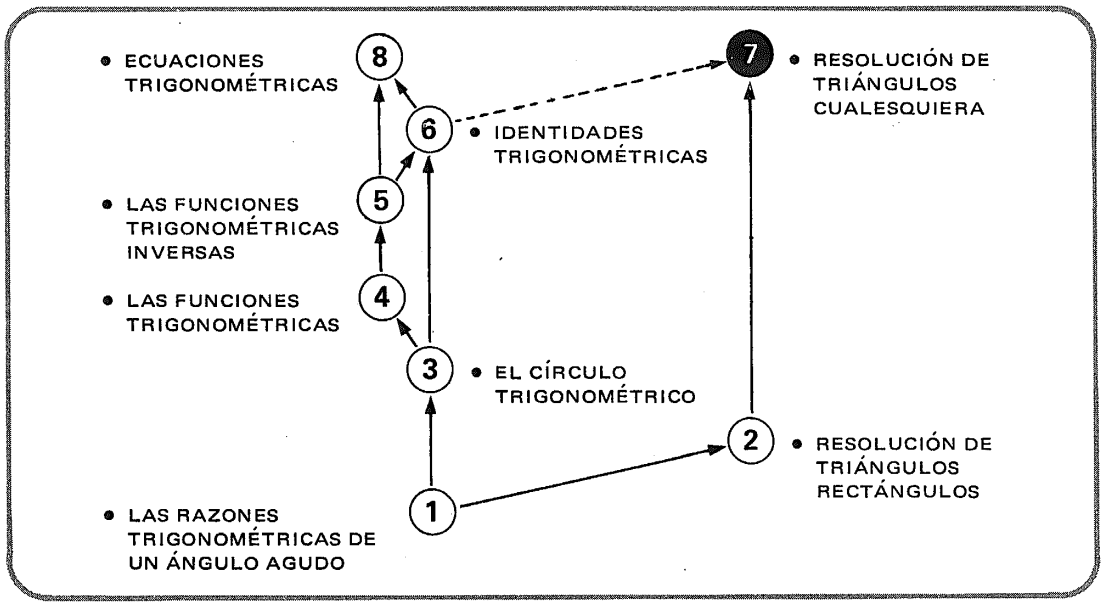
7.7 Resolución de triángulos cualesquiera. Aplicación 82

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 7. Resolución de triángulos cualesquiera

Objetivos: resolver un triángulo cualquiera dadas las medidas de sus elementos, y aplicar tal conocimiento a la resolución de problemas prácticos

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Resolución de triángulos rectángulos	5	2
• El círculo trigonométrico	5	3
• Algunas identidades trigonométricas	5	6

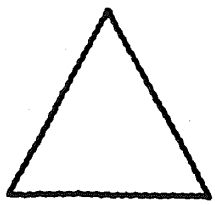
7.1

Ley de los senos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera dadas las medidas de un lado y dos ángulos interiores

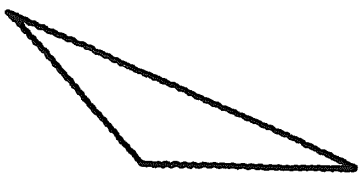
1

Hemos clasificado los triángulos,
según la magnitud de sus
ángulos interiores,
en tres grupos,
como se muestra en
el cuadro siguiente.

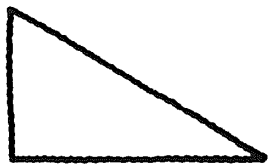
2



Acutángulos:
los tres ángulos agudos.



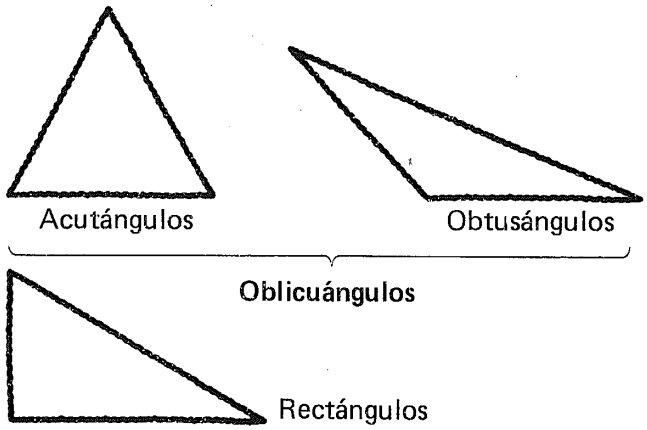
Obtusángulos:
un ángulo obtuso
y dos agudos.



Rectángulos:
un ángulo recto
y dos ángulos agudos.

3

Ahora, llamaremos **oblicuángulos**
a los triángulos que no son rectángulos.



4

Un triángulo **oblicuángulo**
puede ser
acutángulo
u
obtusángulo.

5

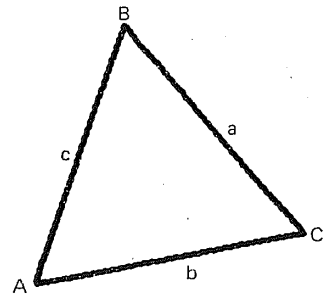
Hemos estudiado
los procedimientos de
resolución de triángulos **rectángulos.**

Nos ocuparemos,
ahora,
de los **oblicuángulos.**

6

En un **triángulo cualquiera**
—rectángulo u oblicuángulo—

llamamos **elementos**
a los
tres lados
y a los
tres ángulos interiores.



7

Sabemos que,
si se conocen
tres de los elementos
de un triángulo cualquiera
(no los tres ángulos),
estamos en condiciones
de conocer los tres restantes.

8

Consideraremos
cuatro casos
para la
resolución de triángulos cualesquiera:

1. Dadas las medidas de un lado y dos ángulos interiores.
2. Dadas las medidas de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos.
3. Dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido.
4. Dadas las medidas de los tres lados.

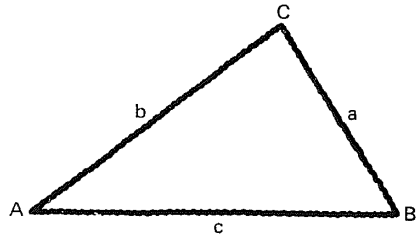
9

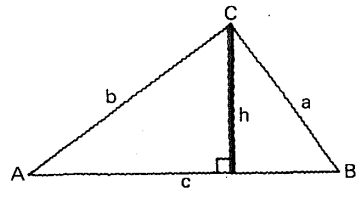
Vamos, ahora,
a
estudiar
una interesante propiedad
de los
triángulos cualesquiera.

10

Consideremos
el
triángulo acutángulo ABC.

Tracemos la altura
correspondiente
al vértice C,
y
llamémosle **h.**

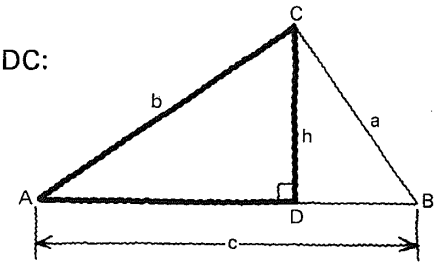




11

En el triángulo rectángulo ADC:

$$\text{sen } A = \frac{\square}{\square}$$



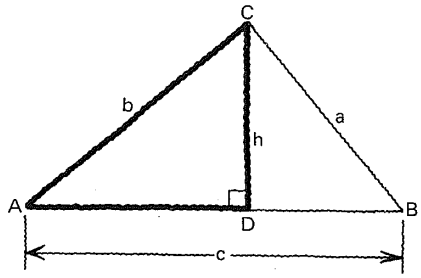
$$\frac{h}{b}\left(\text{ó}\ \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$$

12

sen A $= \frac{h}{b}$

de donde:

h = ____

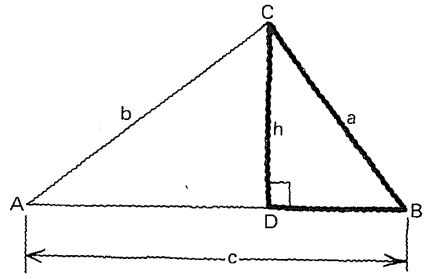


b sen A

13

En el triángulo rectángulo BCD:

sen B = ____



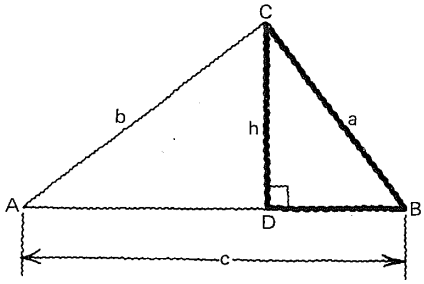
$\frac{h}{a}$

14

sen B $= \frac{h}{a}$

de donde:

h = ____



a sen B

15

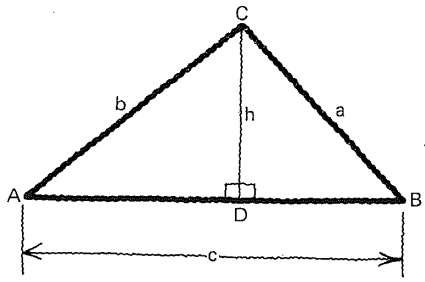
Hemos encontrado que:

$h = b \operatorname{sen} A$

y

$h = a \operatorname{sen} B$

luego, por transitividad de la relación de igualdad:



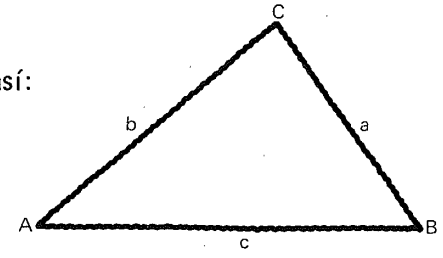
$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$

16

$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$

Esto puede expresarse así:

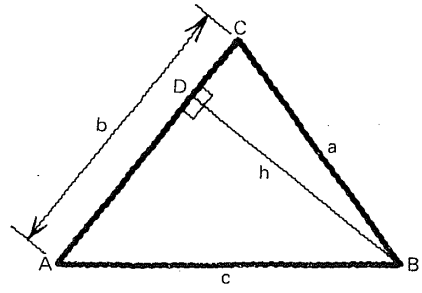
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b}$$



17

Del mismo modo, con ayuda de la figura, podemos demostrar que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{c}$$



En el triángulo rectángulo BCD:

$\operatorname{sen} C = \frac{h}{a} \therefore h = a \operatorname{sen} C$

En el triángulo rectángulo ABD:

$\operatorname{sen} A = \frac{h}{c} \therefore h = c \operatorname{sen} A$

Por transitividad:

$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A$

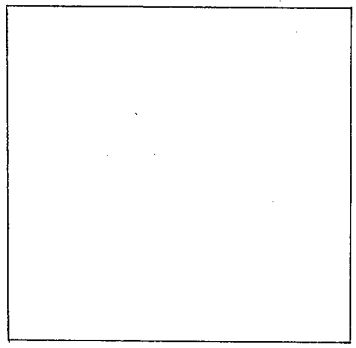
o bien

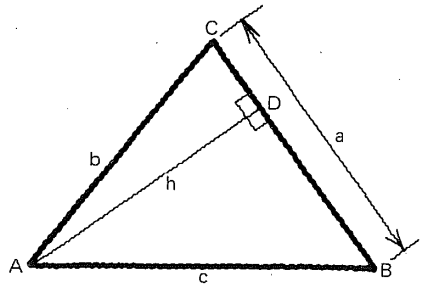
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{c}$$

18

También, con ayuda de esta figura, encontramos que

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} = \frac{b}{c}$$





En el triángulo rectángulo ACD:

$\text{sen C} = \frac{h}{b} \therefore h = b\,\text{sen C}$

En el triángulo rectángulo ADB:

$\text{sen B} = \frac{h}{c} \therefore h = c\,\text{sen B}$

Por transitividad:

$b\,\text{sen C} = c\,\text{sen B}$

o bien:

$$\frac{\textbf{sen B}}{\textbf{sen C}} = \frac{b}{c}$$

19

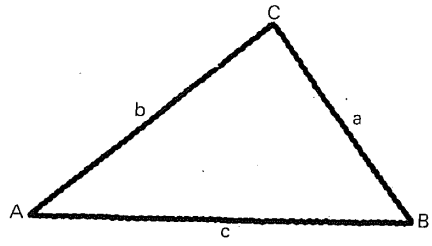
$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} = \frac{b}{c}$$

Podemos escribir estas igualdades, también, así:

$$\frac{\textbf{sen A}}{\textbf{a}} = \frac{\textbf{sen B}}{\textbf{b}}$$



$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$

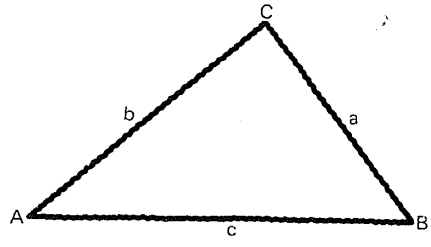
$$\frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$

20

$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}}$$

$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$

$$\frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$



En forma más compacta:

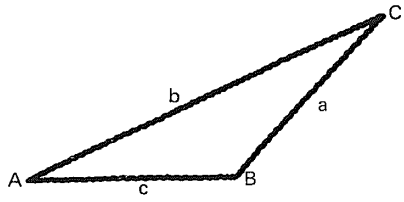
$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$

21

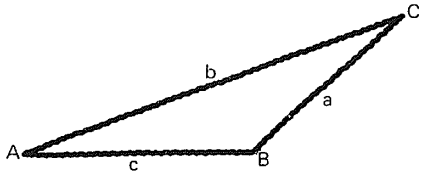
Veamos
si esa propiedad
se
cumple
para un

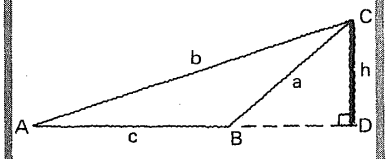
triángulo obtusángulo.



22

Tracemos la altura
correspondiente al
vértice C, y
llamémosle h.

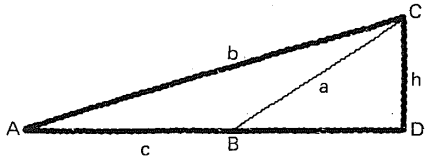




23

En el triángulo
rectángulo ACD:

sen A = $\frac{\square}{\square}$



de donde

$\square$

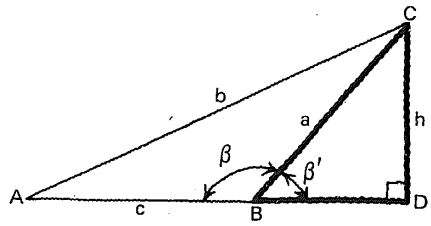
$\frac{h}{b}$

$h = b \operatorname{sen} A$

24

En el triángulo rectángulo BCD:

sen $\beta' = \frac{\square}{\square}$



$\frac{h}{a}$

25

Obtuvimos:

sen $\beta' = \frac{h}{a}$

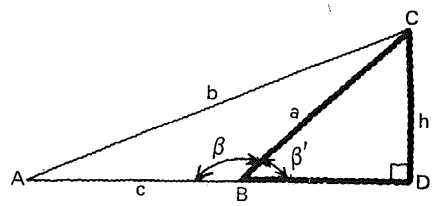
pero recordemos que:

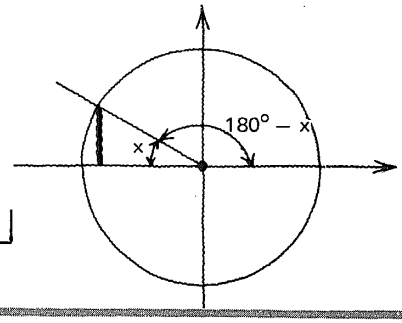
sen $(180° - x) = f(\text{sen } x)$

$= \square$

Por lo tanto:

sen $\beta = \square$





sen x

sen $(180° - \beta') = \text{sen } \beta'$

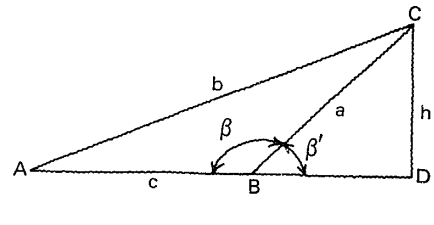
26

Entonces:

sen $\beta' = \text{sen } \beta = \frac{h}{a}$

de donde:

$h = \square$



a sen β

27

$h = b \operatorname{sen} A$

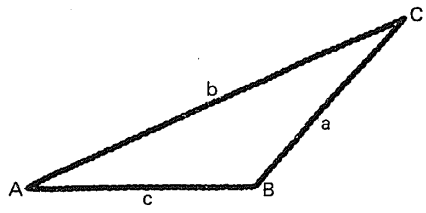
$h = a \operatorname{sen} B$

Por transitividad:

$\square = \square$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen} \square}{\operatorname{sen} \square} = \frac{\square}{\square}$$



$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$

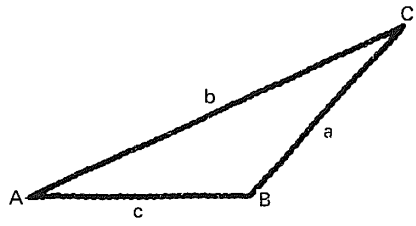
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b}$$

28

Podemos demostrar siguiendo el mismo procedimiento, que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{\square}{\square}$$



$\frac{a}{c}$

$\frac{b}{c}$

29

La propiedad

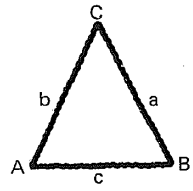
$$\frac{\textbf{sen A}}{\textbf{a}} = \frac{\textbf{sen B}}{\textbf{b}} = \frac{\textbf{sen C}}{\textbf{c}}$$

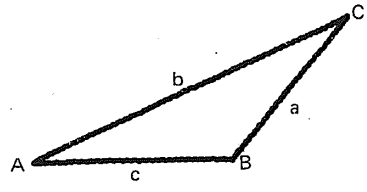
o

$$\frac{\textbf{a}}{\textbf{sen A}} = \frac{\textbf{b}}{\textbf{sen B}} = \frac{\textbf{c}}{\textbf{sen C}}$$

se cumple **para cualquier triángulo oblicuángulo** y se conoce como

Ley de los senos.



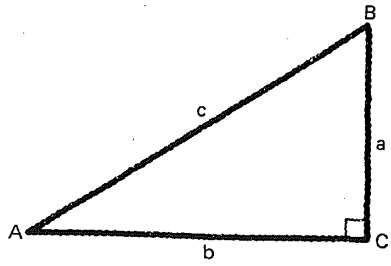


30

Ahora, nos preguntamos:
¿se cumple
la

Ley de los senos

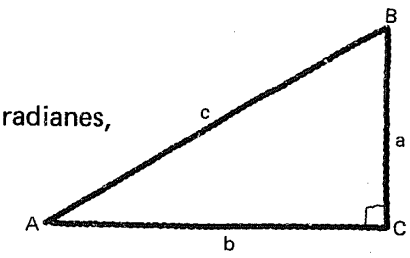
para
un triángulo **rectángulo**?



31

Sabemos que,
siendo $\measuredangle$ C = $\boxed{}$ ° = $\boxed{}$ radianes,

sen C = $\boxed{}$



$90° = \frac{\pi}{2}$

1

32

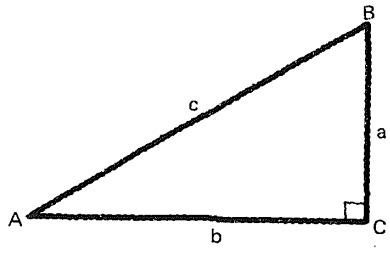
En el triángulo rectángulo ABC,
sen C = 1,
y la
expresión

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} = \frac{a}{c}$$

se convierte en

$\boxed{}$

que es una proposición V/F



$\text{sen A} = \frac{a}{c}$

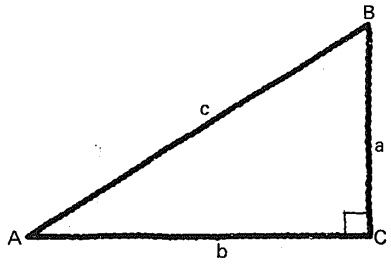
V

33

Similarmente,
la expresión:

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} = \frac{b}{c}$$

se convierte en



$$\text{sen B} = \frac{b}{c}$$

que es una proposición **V/F**

V

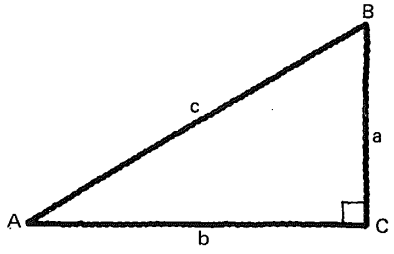
34

Si

$$\text{sen A} = \frac{a}{c} \longrightarrow c = \frac{a}{\text{sen A}}$$

$$\text{sen B} = \frac{b}{c} \longrightarrow c = \frac{b}{\text{sen B}}$$

entonces, por transitividad:



$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$$

35

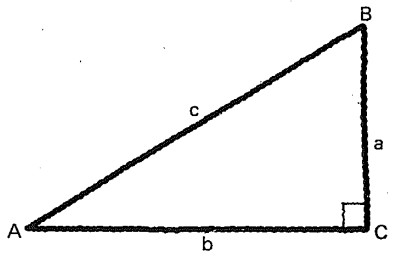
Encontramos que,
para un triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$$

o bien:

$$\frac{\textbf{sen A}}{\textbf{a}} = \frac{\textbf{sen B}}{\textbf{b}}$$

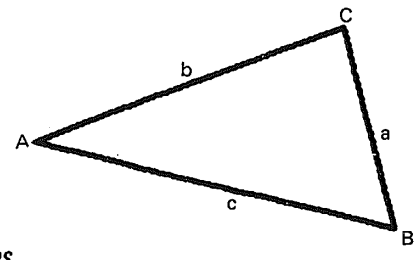
Vemos, entonces, que
la **Ley de los senos** se cumple
para todo triángulo.



36

Podemos enunciar
la **Ley de los senos**
así:

en todo triángulo,
los senos de los
ángulos interiores
son
directamente proporcionales
a las medidas de
los lados opuestos.



37

Aprovecharemos
la propiedad estudiada
para
la resolución de algunos
triángulos oblicuángulos.

38

En la proporción

$$\frac{\text{sen}\,\textcircled{A}}{\textcircled{a}} = \frac{\text{sen}\,\textcircled{B}}{b}$$

observamos que,
si conocemos
$\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y a,
podemos conocer [ ]

b

39

Entonces,
la **Ley de los senos**
puede ser utilizada
para la resolución de
un triángulo cualquiera
para el que se conocen
las medidas de
un lado
y de dos ángulos interiores,

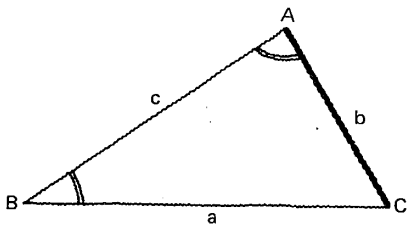
caso 1.

40

Por ejemplo,
en el triángulo ABC
tenemos que:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Para que dicho triángulo
quede resuelto,
hace falta conocer:



$\measuredangle C$
a
c

41

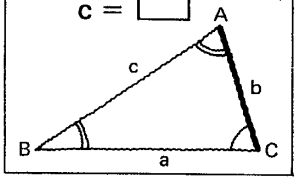
Organicemos la información en esta forma:

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C =$ ⌊⌋
$a =$ ⌊⌋
$c =$ ⌊⌋



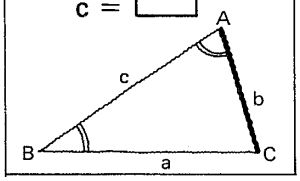
42

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C =$ ⌊___⌋
$a =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



1. Si conocemos las medidas de dos de los ángulos interiores, es posible determinar la medida del tercero.

$\measuredangle C =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle C = 180° - \measuredangle A - \measuredangle B$
$\measuredangle C = 180° - 75° - 45°$
$\measuredangle C = 180° - 120°$

60°

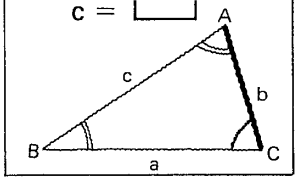
43

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 60°$
$a =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



2. Determinación de a.

Escribimos la ley de los senos en esta forma:

lado cuya medida queremos conocer ↓

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

↑ lado de medida conocida

de donde:

$a =$ ⌊_____⌋

$$\frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

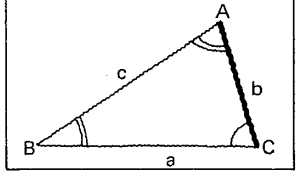
44

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 60°$
$a =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

Sustituimos los datos:

$a =$ ⌊_____⌋

$$\frac{10 \text{ sen } 75°}{\text{sen } 45°}$$

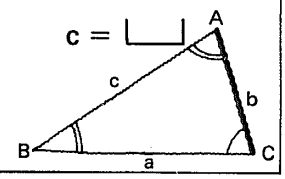
45

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 60°$
$a = \square$
$c = \square$



$$a = \frac{10 \operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 45°}$$

$a \doteq \square$

$a \doteq \square$

$$\frac{10 \times 0.965925826}{0.707106781}$$

13.66

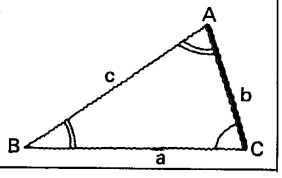
46

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 60°$
$a = 13.66$
$c = \square$



3. Determinación de c.

Escribimos una expresión adecuada de la ley de los senos:

$\square$

lado de medida requerida

$$\frac{c}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

lado de medida conocida, de preferencia un dato

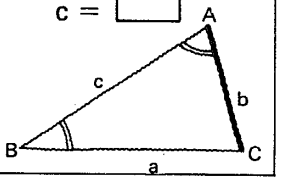
47

Datos:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 60°$
$a = 13.66$
$c = \square$



$$\frac{c}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

$c = \square$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

$$c = \frac{10 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°}$$

$$c \doteq \frac{10 \times 0.866025403}{0.707106781}$$

12.25

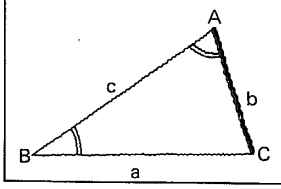
48

Elementos dados:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Elementos calculados:

$\measuredangle C = 60°$
$a \doteq 13.66$
$c \doteq 12.25$



De esta manera, el triángulo ha quedado completamente resuelto.

Ahora conocemos las medidas de todos sus elementos.

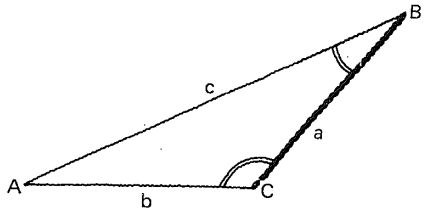
49

Otro ejemplo.

Del triángulo ABC, conocemos:

$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Para que este triángulo quede totalmente resuelto, se requiere determinar:



$\measuredangle A$

b

c

50

Datos

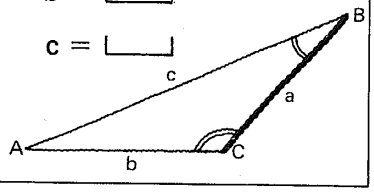
$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Incógnitas:

$\measuredangle A =$ ⌊___⌋

$b =$ ⌊___⌋

$c =$ ⌊___⌋



1. Determinación de $\measuredangle A$.

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle A + 27° 15' + 130° 46' = 180°$
$\measuredangle A + 158° 01' = 180°$
$\measuredangle A = 180° - 158° 01'$

$21° 59'$

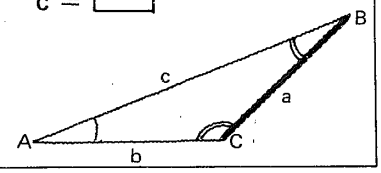
51

Datos:

$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 21° 59'$
$b =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



2. Determinación de b.

$b \doteq$ ⌊_____⌋

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{125 \text{ sen } 27° 15'}{\text{sen } 21° 59'}$$

$$b \doteq \frac{125 \times 0.45787392}{0.37433687}$$

152.90

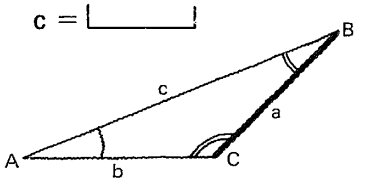
52

Datos:

$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 21° 59'$
$b = 152.90$
$c =$ ⌊_____⌋



3. Determinación de c.

$c \doteq$ ⌊_____⌋

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{125 \times \text{sen } 130° 46'}{\text{sen } 21° 59'}$$

$\text{sen } 130° 46' = \text{sen } 49° 14'$
$\doteq 0.75737507$

$$c \doteq \frac{125 \times 0.75737507}{0.37433687}$$

252.91

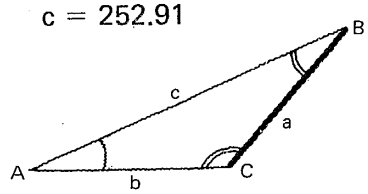
53

Elementos dados:

$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Elementos calculados:

$\measuredangle A = 21° 59'$
$b = 152.90$
$c = 252.91$



Dejaremos para después la comprobación de estos resultados.

5.7.1.1

Práctica adicional
de
resolución de triángulos cualesquiera,
dadas las medidas de
un lado y dos ángulos interiores,
si se considera necesario.

5.7.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las expresiones trigonométricas de la Ley de los senos;
- *aplicar* la Ley de los senos a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de un lado y dos ángulos interiores.

7.2

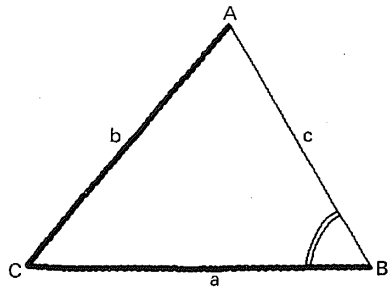
Ley de los senos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos

54

Observar con atención.

En el triángulo ABC:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$



Para su resolución, ¿podemos seguir aplicando la **Ley de los senos**?

Sí/No

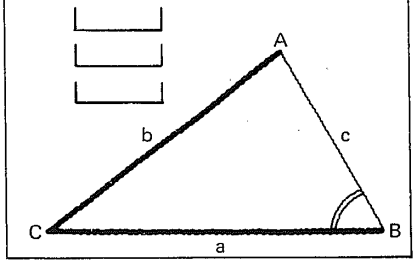
Sí

55

Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:



c
$\measuredangle A$
$\measuredangle C$

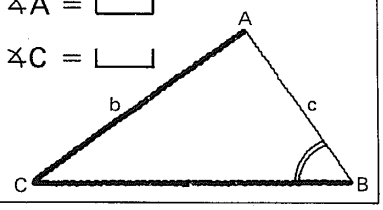
56

Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:

$c =$ ⌊___⌋
$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



1. Determinación de $\measuredangle A$.

Expresión adecuada de la **Ley de los senos:**

⌊_____⌋

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{a}{b}$$

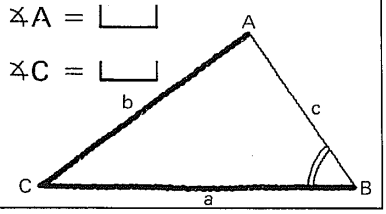
57

Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:

$c =$ ⌊___⌋
$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{a}{b}$$

de donde:

$\text{sen } A =$ ⌊_____⌋

$$\frac{a \text{ sen } B}{b}$$

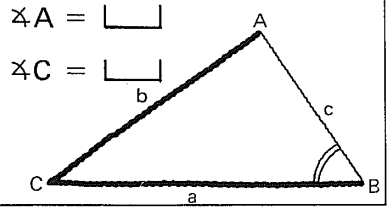
58

Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:

$c =$ ⌊___⌋
$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



$$\text{sen } A = \frac{a \text{ sen } B}{b}$$

sustituyendo datos:

$\text{sen } A =$ ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

$\text{sen } A \doteq$ ⌊_____⌋

$$\frac{15 \text{ sen } 60°}{20}$$

$$\frac{15 \times 0.866025403}{20}$$

↓

0.649519052

59

Datos:

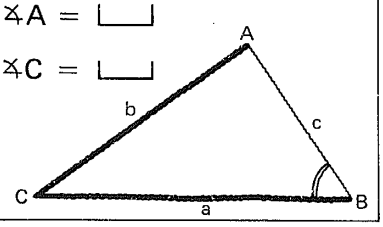
$a = 15$
$b = 20$
$\sphericalangle B = 60°$

Incógnitas:

$c =$ ⌊___⌋

$\sphericalangle A =$ ⌊___⌋

$\sphericalangle C =$ ⌊___⌋



sen A ≐ 0.649519052

$\sphericalangle A \doteq$ ⌊_____⌋

Estudiar con mucha atención.

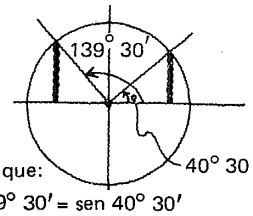
$\sphericalangle A \doteq$ arc sen 0.649519052

$0° < \sphericalangle A < 180°$

$40.505347° \doteq 40° 30'$

Y también se satisfacen los requerimientos del problema con:

$\sphericalangle A \doteq 180° - 40° 30' = 139° 30'$



puesto que:

sen 139° 30' = sen 40° 30'

≐ 0.649519052

60

Datos:

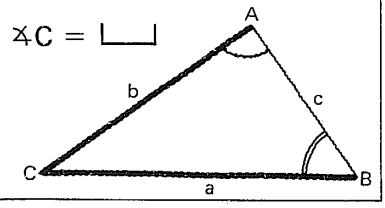
$a = 15$
$b = 20$
$\sphericalangle B = 60°$

Incógnitas:

$\sphericalangle A = 40° 30'$ ó $139° 30'$

$c =$ ⌊___⌋

$\sphericalangle C =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\sphericalangle$ C.

Posibilidad 1, tomando $\sphericalangle A = 40° 30'$

$\sphericalangle C \doteq$ ⌊_____⌋

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

$40° 30' + 60° + \sphericalangle C = 180°$

$100° 30' + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle C = 180° - 100° 30'$

$79° 30'$

61

Datos:

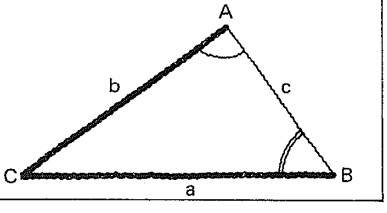
$a = 15$
$b = 20$
$\sphericalangle B = 60°$

Incógnitas:

$\sphericalangle A = 40° 30'$ ó $139° 30'$

$c =$ ⌊___⌋

$\sphericalangle C = 79° 30'$ ó ⌊___⌋



2. Determinación de $\sphericalangle$ C.

Posibilidad 2, tomando $\sphericalangle A' = 139° 30'$

$\sphericalangle C' =$ ⌊_____⌋

Atención:

$\sphericalangle A' + \sphericalangle B + \sphericalangle C' = 180°$

$139° 30' + 60° + \sphericalangle C = 180°$

$199° 30' + \sphericalangle C' = 180°$ (*)

$\sphericalangle C = 180° - 199° 30'$

● $-(19° 30')$

Un ángulo de medida negativa no satisface los requerimientos del problema.

(*) observamos que:

$\sphericalangle A' + \sphericalangle B + \sphericalangle C' > 180°$.

62

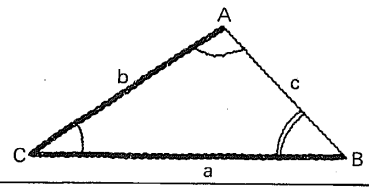
Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 40° 30'$ | ~~$\measuredangle A' = 139° 30'$~~
$\measuredangle C \doteq 79° 30'$ | ~~$\measuredangle C' = -(19° 30')$~~
$c =$ ⌊___⌋

Se descarta esta posible solución.



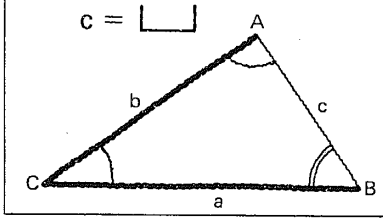
63

Datos:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 40° 30'$
$\measuredangle C = 79° 30'$
$c =$ ⌊___⌋



3. Determinación de c.

$c \doteq$ ⌊___⌋

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B}$$

$$c = \frac{20 \text{ sen } 79° 30'}{\text{sen } 60°}$$

$$c = \frac{20 \times 0.983254907}{0.866025403}$$

22.71

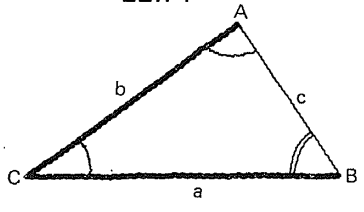
64

Elementos dados:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60°$

Elementos calculados:

$\measuredangle A = 40° 30'$
$\measuredangle C = 79° 30'$
$c \doteq 22.71$



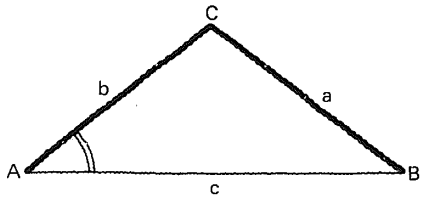
Queda, así, determinado un triángulo oblicuángulo único.

65

En el triángulo ABC:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Intentemos su resolución.



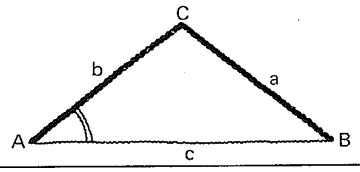
66

Datos:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Incógnitas:

$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



1. Determinación de $\measuredangle B$.

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋

El triángulo ABC es isósceles.
Sabemos que:
en todo triángulo isósceles, los ángulos interiores opuestos a los lados congruentes, son congruentes

Por lo tanto:

$\measuredangle B = \measuredangle A =$ **38°**

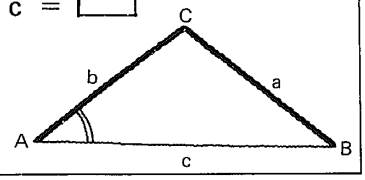
67

Datos:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Incógnitas:

$\measuredangle B = 38°$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋
$c =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$38° + 38° + \measuredangle C = 180°$
$76° + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle C = 180° - 76°$

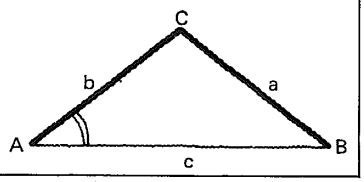
104°

68

Datos:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Incógnitas:
$\measuredangle B = 38°$
$\measuredangle C = 104°$
$c =$ ⌊___⌋



3. Determinación de c.

$c =$ ⌊_____⌋

Por ejemplo:

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{17.50 \text{ sen } 104°}{\text{sen } 38°}$$

$$c = \frac{17.50 \times 0.97029575}{0.61566147}$$

27.58

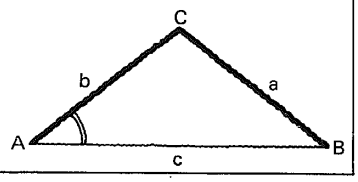
69

Elementos dados:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Elementos calculados:

$\measuredangle B = 38°$
$\measuredangle C = 104°$
$c = 27.58$



Queda determinado, también en este caso, un triángulo oblicuángulo único.

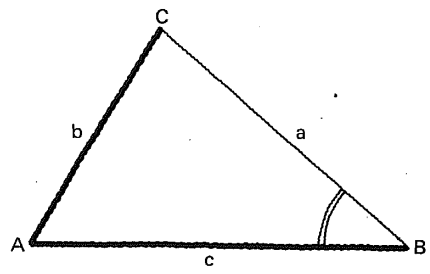
70

En el triángulo ABC:

$c = 8.25$
$b = 1.76$
$\measuredangle B = 41° 18'$

¿Podemos intentar su solución por medio de la ley de los senos?

Sí/No



Sí

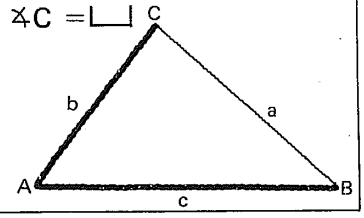
71

Datos:

$c = 8.25$
$b = 1.76$
$\measuredangle B = 41^\circ\ 18'$

Incógnitas:

$a =$ ⌊⌋
$\measuredangle A =$ ⌊⌋
$\measuredangle C =$ ⌊⌋



1. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C =$ ⌊⌋

Atención:

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b}$$

$$\text{sen } C = \frac{8.25 \times \text{sen } 41^\circ\ 18'}{1.76}$$

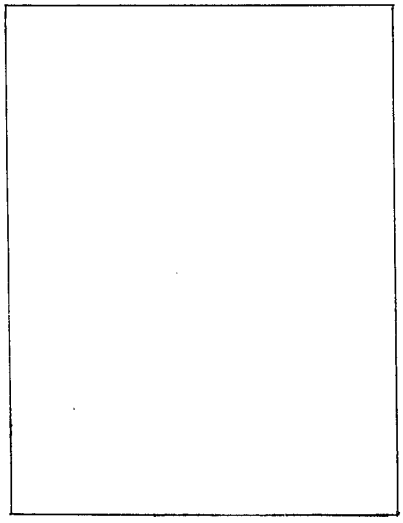
$$\text{sen } C \doteq \frac{8.25 \times 0.66000167}{1.76}$$

$$\text{sen } C \doteq 3.0937575$$

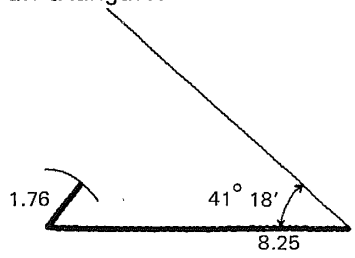
pero debemos recordar que:

- $\measuredangle C$ no está definida para $\text{sen } C > 1$

72



No se determina un triángulo.

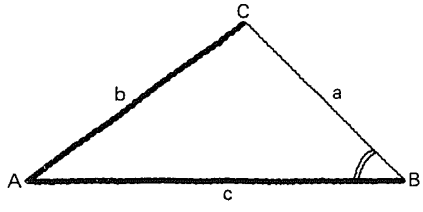


Observemos que no es posible construir triángulo alguno con los datos proporcionados.

73

En el triángulo ABC:

$\measuredangle B = 45^\circ$
$b = 60$
$c = 75$



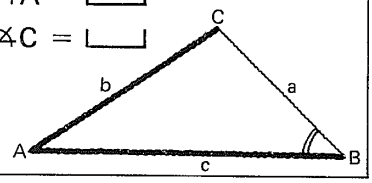
74

Datos:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Incógnitas:

$a =$ ⌊___⌋
$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



1. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C \doteq$ ⌊_____⌋

Atención:

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{b}$$

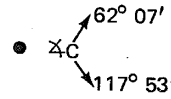
$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{75 \operatorname{sen} 45°}{60}$$

$$\operatorname{sen} C \doteq \frac{75 \times 0.70710678}{60}$$

$$\operatorname{sen} C \doteq 0.88388348$$

$(0° < \measuredangle C < 180°)$



75

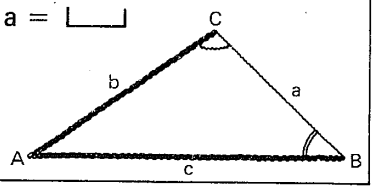
Datos:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 62° 07'$ ó $C' = 117° 53'$

$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$a =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle A$.

Posibilidad 1, tomando:
$\measuredangle C = 62° 07'$

$\measuredangle A \doteq$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle A + 45° + 62° 07' = 180°$
$\measuredangle A + 107° 07' = 180°$
$\measuredangle A = 180° - 107° 07'$

$72° 53'$

76

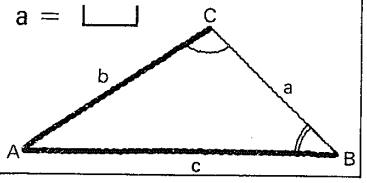
Datos:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 62° 07'$ ó $117° 53'$

$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$a =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle A'$.

Posibilidad 2, tomando:
$\measuredangle C' = 117° 53'$

$\measuredangle A' \doteq$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle A + 45° + 117° 53' = 180°$
$\measuredangle A + 162° 53' = 180°$
$\measuredangle A = 180° - 162° 53'$

$17° 07'$

77

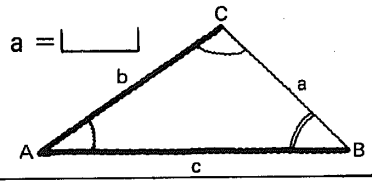
Datos:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Incógnitas:

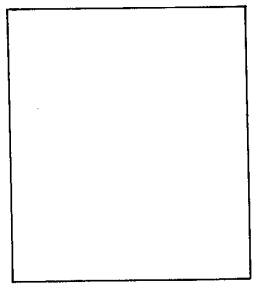
$\measuredangle C = 62° 07'$ ó $117° 53'$
$\measuredangle A = \underbrace{72° 53'}_{\text{solución 1}}$ ó $\measuredangle A' = \underbrace{17° 07'}_{\text{solución 2}}$

$a = \square$



3. Determinación de a.

Solución 1:



$a \doteq \square$

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

$$a = \frac{60 \operatorname{sen} 72° 53'}{\operatorname{sen} 45°}$$

$$a = \frac{60 \times 0.95570744}{0.70710678}$$

81.09

78

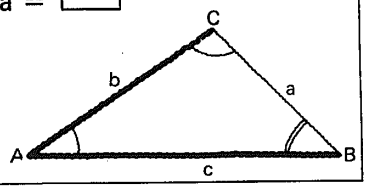
Datos:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Incógnitas:

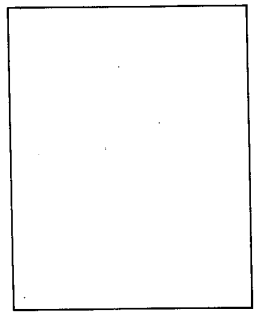
$\measuredangle C = 62° 07'$ ó $117° 53'$
$\measuredangle A = 72° 53'$ ó $A' = 17° 07'$

$a = \square$



3. Determinación de a'.

Solución 2:



$a' \doteq \square$

$$\frac{a'}{b} = \frac{\operatorname{sen} A'}{\operatorname{sen} B}$$

$$a' = \frac{b \operatorname{sen} A'}{\operatorname{sen} B}$$

$$a' = \frac{60 \operatorname{sen} 17° 07'}{\operatorname{sen} 45°}$$

$$a' = \frac{60 \times 0.29431833}{0.70710678}$$

24.97

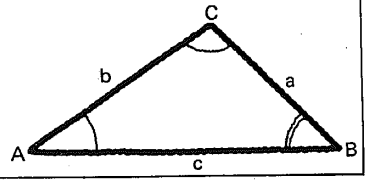
79

Elementos dados:

$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Elementos calculados:

$\measuredangle C = 62° 07'$ ó $C' = 117° 53'$
$\measuredangle A = 72° 53'$ ó $A' = 17° 07'$
$a = 81.09$ ó $a' = 24.97$



Quedan determinados dos triángulos oblicuángulos:

1. Acutángulo
$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$
$\measuredangle C \doteq 62° 07'$
$\measuredangle A \doteq 72° 53'$
$a \doteq 81.09$

2. Obtusángulo
$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$
$\measuredangle C' \doteq 117° 53'$
$\measuredangle A' \doteq 17° 07'$
$a' \doteq 24.97$

80

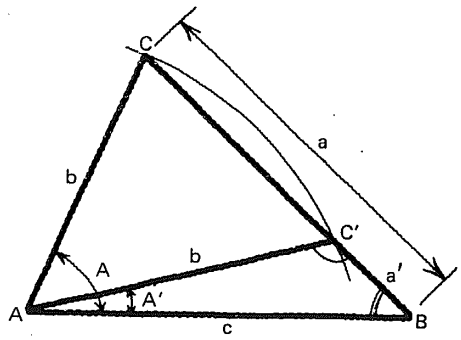
Atención:

Con los datos proporcionados es posible construir dos triángulos:

el △ABC

y

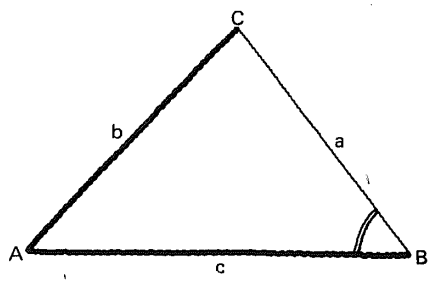
el △ABC′



81

En el triángulo ABC,

$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53° 08'$



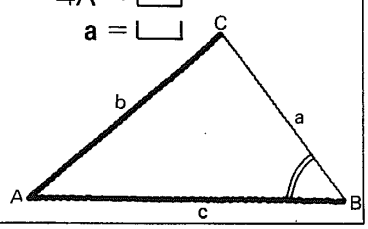
82

Datos:

$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53° 08'$

Incógnitas:

$\measuredangle C =$ ⌊⌋
$\measuredangle A =$ ⌊⌋
$a =$ ⌊⌋



1. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C =$ ⌊⌋

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b}$$

$$\text{sen } C = \frac{500 \times \text{sen } 53° 08'}{400}$$

$$\text{sen } C = \frac{500 \times 0.8}{400}$$

$\text{sen } C = 1 \quad (0° < \measuredangle C < 180°)$

$\measuredangle C = \text{arc sen } 1 = 90°$

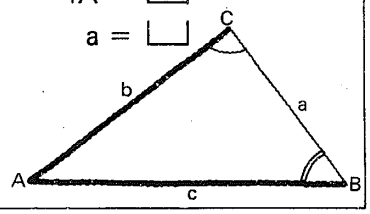
83

Datos:

$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53° 08'$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 90°$
$\measuredangle A =$ ⌊⌋
$a =$ ⌊⌋



2. Determinación de $\measuredangle$ A.

$\measuredangle A \doteq$ ⌊⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle A + 53° 08' + 90° = 180°$
$\measuredangle A + 143° 08' = 180°$
$\measuredangle A = 180° - 143° 08'$

$36° 52'$

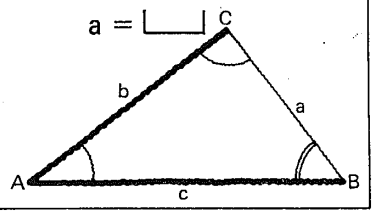
84

Datos:

$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53° 08'$

Incógnitas:

$\measuredangle C = 90°$
$\measuredangle A = 36° 52'$
$a =$ ⌊⌋



3. Determinación de a.

$a =$ ⌊⌋

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

$$a = \frac{400 \text{ sen } 36° 52'}{\text{sen } 53° 08'}$$

$$a = \frac{400 \times 0.59995488}{0.80003384}$$

$299.96 \doteq 300$

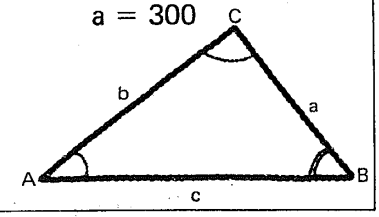
85

Elementos dados:

$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53° 08'$

Elementos calculados:

$\measuredangle C = 90°$
$\measuredangle A = 36° 52'$
$a = 300$



Ha quedado determinado un triángulo rectángulo único.

86

Vemos que:
si se nos dan las medidas de
dos lados y del ángulo opuesto a uno
de ellos, puede ocurrir alguna de las
siguientes cosas:

1. no hay solución
2. hay una solución (triángulo rectángulo u oblicuángulo)
3. hay dos soluciones

Se suele llamar **caso ambiguo,**
a este 2º caso de resolución
de triángulos cualesquiera.

5.7.2.1

Práctica adicional
de
resolución de triángulos cualesquiera,
dadas las medidas de dos lados
y del ángulo opuesto a uno de ellos,
si se considera necesario.

5.7.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

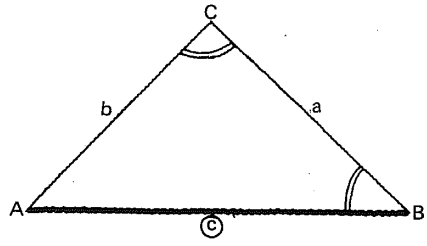
- *aplicar* la ley de los senos a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos (caso ambiguo);
- *explicar* los diferentes resultados que pueden obtenerse en la resolución de un triángulo cualesquiera, cuando se dan las medidas de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos (caso ambiguo).

7.3

Ley de los cosenos y su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido

87

Conocidas las medidas de los elementos indicados, ¿es posible la resolución del triángulo representado, por medio de la ley de los senos?



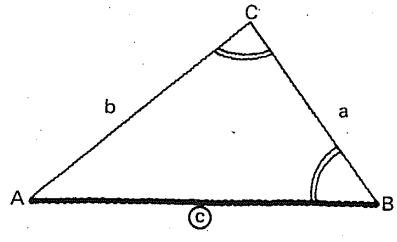
Sí/No

Sí

88

¿Cuál podría ser una posible secuencia de operaciones para la resolución del triángulo ABC?

1. ┌──────┐
2. ┌──────┐
3. ┌──────┐



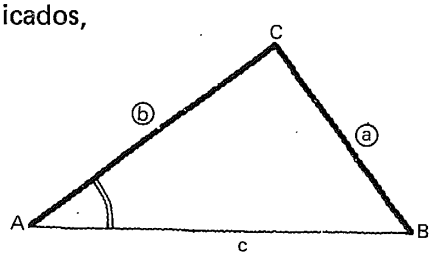
Por ejemplo:

- determinación de $\measuredangle A$, a partir de: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
- determinación de b, a partir de: $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C} \therefore b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$
- determinación de a, a partir de: $\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} \therefore a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C}$

89

Dados los elementos indicados, ¿es posible la resolución del triángulo ABC, usando la ley de los senos?

Sí/No

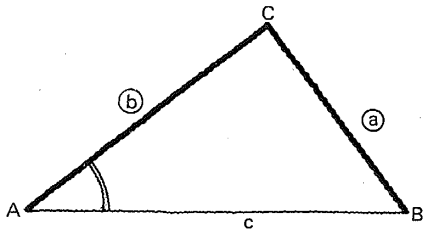


Sí

90

Posible secuencia de operaciones para la resolución del triángulo ABC.

1. ┌──────┐
2. ┌──────┐
3. ┌──────┐



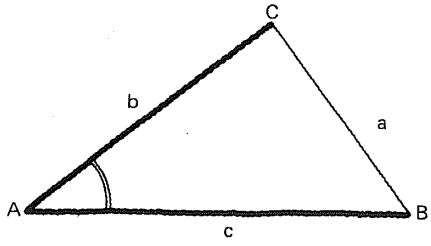
Por ejemplo:

- determinación de $\measuredangle B$, de:
  $\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{b}{a} \therefore \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$
- determinación de $\measuredangle C$, de:
  $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
- determinación de c, de:
  $\frac{c}{a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} \therefore c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$

91

Dadas las medidas de los elementos señalados, ¿es posible la resolución del triángulo ABC, por medio de la ley de los senos?

Sí/No



No

92

Estudiaremos

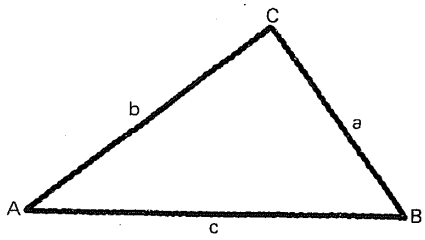
otra propiedad de los triángulos,

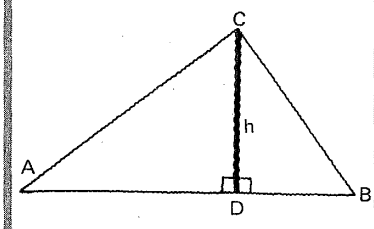
que podrá ser utilizada
en los casos
en que
la ley de los senos no pueda aplicarse.

93

Consideremos el triángulo
acutángulo ABC.

Tracemos la altura
correspondiente
al vértice C,
y llamémosle h.





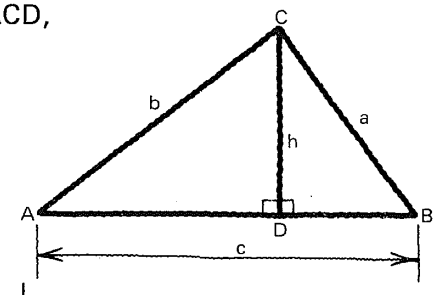
94

En el triángulo rectángulo ACD,
de acuerdo con Pitágoras:

$$h^2 = b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2$$

Similarmente,
en el triángulo
rectángulo BCD:

$$h^2 = \square$$



$$a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$$

95

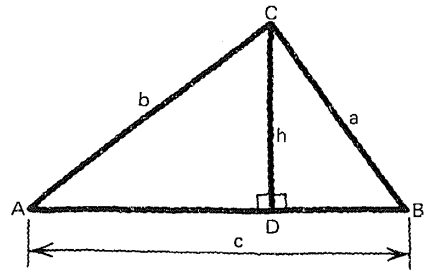
Escribimos los resultados obtenidos:

$$h^2 = b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2$$

y

$$h^2 = a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$$

Ahora, por transitividad:



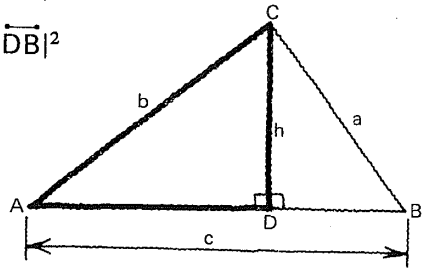
$b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$

96

$$b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$$

Ahora bien; en el $\triangle ACD$:

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{b} =$$



cos A

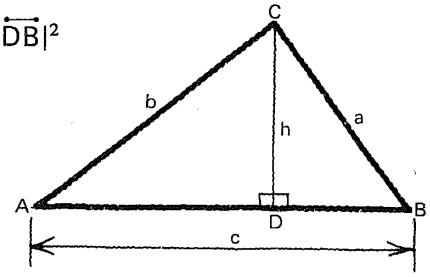
97

$$b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$$

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{b} = \cos A$$

De esta última igualdad obtenemos:

$$|\overrightarrow{AD}| =$$



b cos A

98

$b^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = a^2 - |\overrightarrow{DB}|^2$

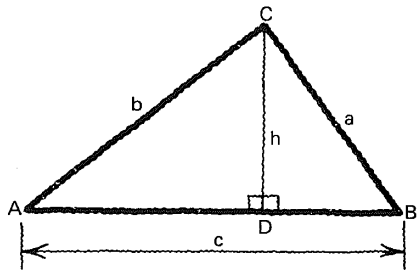
$|\overrightarrow{AD}| = b \cos A$

Observamos que:

$|\overrightarrow{DB}| = c - |\overrightarrow{AD}|$

y, por sustitución del equivalente de $|\overrightarrow{AD}|$:

$|\overrightarrow{DB}| = c - b \cos A$



Sustituyendo estas expresiones equivalentes para $|\overrightarrow{AD}|$ y $|\overrightarrow{DB}|$ en la primera de las igualdades, se obtiene:

[ ]

$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - (c - b \cos A)^2$

99

$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - (c - b \cos A)^2$

Desarrollando el binomio del segundo miembro:

$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - ($ [ ] $)$

$c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A$

100

$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - (c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A)$

Expresión equivalente, sin paréntesis:

[ ]

$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - c^2 + 2bc \cos A - b^2 \cos^2 A$

101

$$b^2 - b^2\cos^2 A = a^2 - c^2 + 2bc\cos A - b^2\cos^2 A$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos A$

102

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos A$$

Despejando:

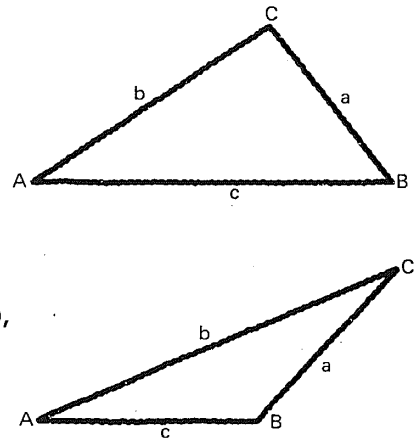
$$a^2 = \boxed{\qquad\qquad}$$

$b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

103

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

A pesar de que esta expresión ha sido deducida para un triángulo acutángulo, puede demostrarse su validez para un triángulo obtusángulo, como el representado abajo.



104

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

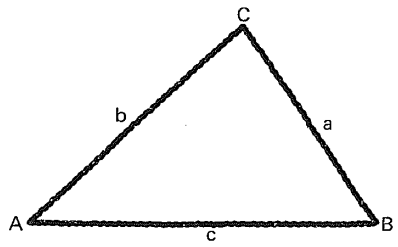
Puede demostrarse, también, que:

$b^2 =$ [ ]

y

$c^2 =$ [ ]

↑ intentemos escribir las expresiones correspondientes, tomando como modelo la primera.



$a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

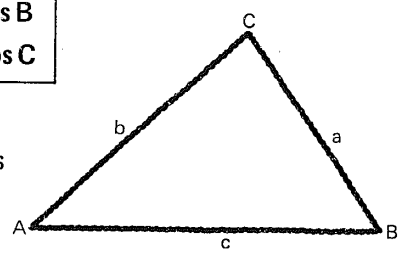
$a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

105

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

A este conjunto de propiedades se le conoce con el nombre de:

Ley de los cosenos.



106

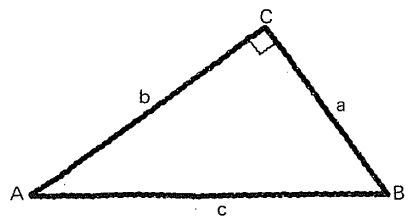
En el triángulo rectángulo ABC, sea C el ángulo recto.

De acuerdo con la ley de los cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$;

pero $\cos C =$ [ ]
por lo que:

$c^2 =$ [ ]



0

$a^2 + b^2$

107

Para un triángulo rectángulo, obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

por lo que podemos considerar a la

ley de los cosenos

como una propiedad más general que el

teorema de Pitágoras.

válida para cualquier triángulo.

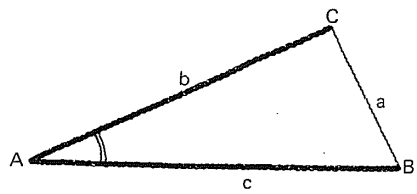
108

Sea el triángulo ABC, en el que:

$b = 12$

$c = 13$

$\measuredangle A = 25° 35'$



que vamos a resolver con ayuda de la ley de los cosenos.

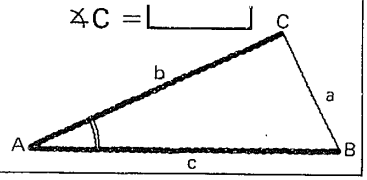
109

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a =$ ⌊____⌋
$\measuredangle B =$ ⌊____⌋
$\measuredangle C =$ ⌊____⌋



1. Determinación de a.

Escribimos, de acuerdo con la ley de los cosenos:

$a^2 =$ ⌊_____⌋

$b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$

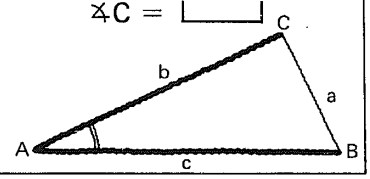
110

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a =$ ____
$\measuredangle B =$ ____
$\measuredangle C =$ ____



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

de donde:

$a =$ ____

$+\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

↑

$a < 0$ no satisface los requerimientos del problema

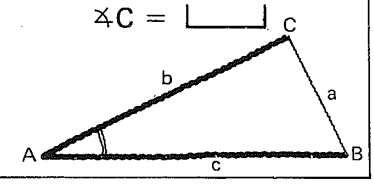
111

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a =$ ____
$\measuredangle B =$ ____
$\measuredangle C =$ ____



$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

Sustituyendo datos:

$a =$ ____

$\sqrt{12^2+13^2-2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cos 25° 35'}$

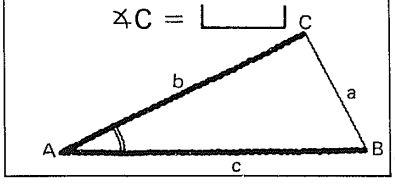
112

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a =$ ____
$\measuredangle B =$ ____
$\measuredangle C =$ ____



$a = \sqrt{12^2 + 13^2 - 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cos 25°35'}$

$a \doteq$ ____

$\sqrt{12^2+13^2-2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 0.901958177}$

$\sqrt{144 + 169 - 281.41}$

$\sqrt{31.59}$

5.62

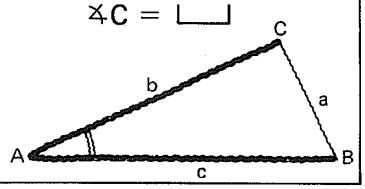
113

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle B$.

Ruta alternativa 1.

Por medio de la

ley de los senos

$$\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{12 \text{ sen } 25° 35'}{5.62}$$

$$\text{sen } B \doteq \frac{12 \times 0.431823398}{5.62}$$

$$\downarrow$$

$$\text{sen } B \doteq 0.92204283$$

$\measuredangle B = \text{arc sen } 0.922042842$
para $0 < \measuredangle B < 180°$

- **$\measuredangle B \doteq 67° 14'$ ó $\measuredangle B' = 112° 46'$**

$\measuredangle B \doteq$ ⌊___⌋

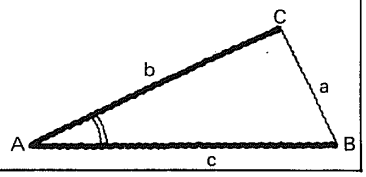
114

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle B$.

Ruta alternativa 2.

Por medio de la

ley de los cosenos.

Escribimos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

y despejamos

cos B:

⌊___⌋

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

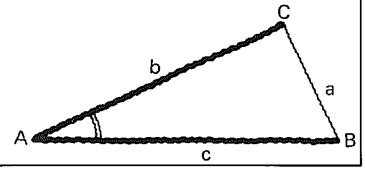
115

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Sustituyendo datos:

⌊___⌋

$$\cos B = \frac{5.62^2 + 13^2 - 12^2}{2 \cdot 5.62 \cdot 13}$$

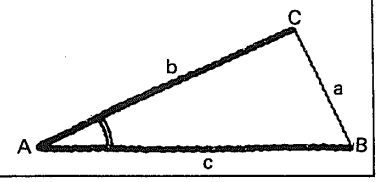
116

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



$$\cos B = \frac{5.62^2 + 13^2 - 12^2}{2 \cdot 5.62 \cdot 13}$$

$\measuredangle B \doteq$ ⌊_____⌋

Mucha atención.

$$\cos B = \frac{31.58 + 169 - 144}{146.12}$$

$\cos B \doteq 0.387215986$

$\measuredangle B \doteq \text{arc cos } 0.387215986$
para $0° < \measuredangle B < 180°$

- $\measuredangle B \doteq \mathbf{67° 13'}$

Observemos la conveniencia de utilizar la ley de los cosenos para la determinación de medidas de ángulos, ya que, en el intervalo $\rightarrow 0° < x < 180°$,
$\cos x \geqslant 0$ para $0° < x \leqslant 90°$
$\cos x < 0$ para $90° < x < 180°$.

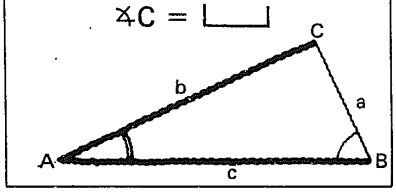
117

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B = 67° 13'$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



La segunda solución

($\measuredangle B' \doteq 112° 46'$)

obtenida por la ley de los senos debe ser descartada.

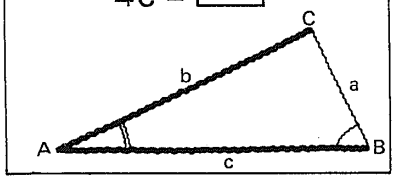
118

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B = 67° 13'$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



3. Determinación de $\measuredangle C$.

Ruta alternativa 1.
A partir de:
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle C \doteq$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
$25° 35' + 67° 13' + \measuredangle C = 180°$
$92° 48' + \measuredangle C = 180°$
$\measuredangle C = 180° - 92° 48'$

$87° 12'$

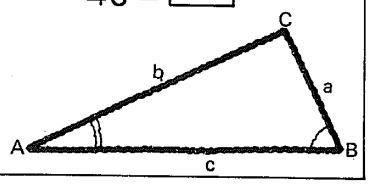
119

Datos:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Incógnitas:

$a = 5.62$
$\measuredangle B = 67° 13'$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



3. Determinación de $\measuredangle C$.

Ruta alternativa 2.
Por medio de la **ley de los cosenos** y verificando los resultados a partir de:
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle C \doteq$ ⌊_____⌋

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
de donde:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C \doteq \frac{5.62^2 + 12^2 - 13^2}{2 \cdot 5.62 \cdot 12}$$

$$\cos C \doteq \frac{31.58 + 144 - 169}{134.88}$$

$\cos C \doteq 0.048784104$

Para $0° < \measuredangle C < 180°$

$\measuredangle C \doteq \arccos 0.048784104$

● $\measuredangle C \doteq 87° 12'$

Ver cuadro siguiente.

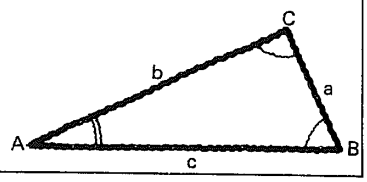
120

Elementos dados:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25° 35'$

Elementos calculados:

$a = 5.62$
$\measuredangle B = 67° 13'$
$\measuredangle C = 87° 12'$



Verificación de las medidas de los ángulos:

$$\begin{aligned} \measuredangle A &= 25° 35' \\ \measuredangle B &= 67° 13' \\ \measuredangle C &= 87° 12' \\ \hline \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C &= 179° 60' \\ &= 180° \end{aligned}$$

4.7.3.1

Práctica adicional
de resolución de
triángulos cualesquiera,
dadas las medidas de
dos lados y el ángulo
comprendido,
utilizando la ley de los cosenos,
si se considera necesario.

5.7.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las expresiones trigonométricas de la ley de los cosenos;
- *aplicar* la ley de los cosenos a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido.

7.4

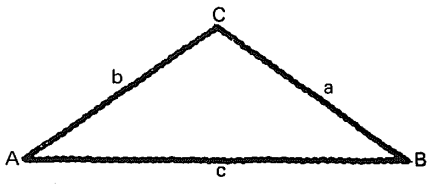
Aplicación de la ley de los cosenos
a la resolución de triángulos cualesquiera,
dadas las medidas de los tres lados

121

En el triángulo ABC:

$a = 65$
$b = 82$
$c = 114$

Es necesario determinar
para su completa resolución:



└____┘
└____┘
└____┘

∡A
∡B
∡C

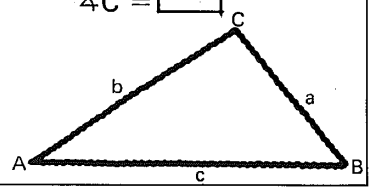
122

Datos:

$a = 65$
$b = 82$
$c = 114$

Incógnitas:

∡A = └____┘
∡B = └____┘
∡C = └____┘



1. Determinación de ∡ A.

Escribimos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

de donde:

$\cos A =$ └_____┘

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

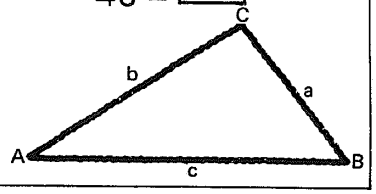
123

Datos:

$a = 65$
$b = 82$
$c = 114$

Incógnitas:

$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\measuredangle A \doteq$ ⌊_____⌋

$$\cos A = \frac{82^2 + 114^2 - 65^2}{2 \cdot 82 \cdot 114}$$

$$\cos A = \frac{6\,724 + 12\,996 - 4\,225}{18\,696}$$

$\cos A \doteq 0.828786906$

Para $0° < \measuredangle A < 180°$

$\measuredangle A \doteq \text{arc cos } 0.828786906$

34° 02′

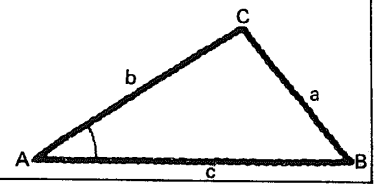
124

Datos:

$a = 65$
$b = 82$
$c = 114$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 34° 02′$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle B$.

$\measuredangle B \doteq$ ⌊_____⌋

De

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

obtenemos:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{65^2 + 114^2 - 82^2}{2 \cdot 65 \cdot 114}$$

$$\cos B = \frac{4\,225 + 12\,996 - 6\,724}{14\,820}$$

$\cos B \doteq 0.708299595$

Para $0° < \measuredangle B < 180°$

$\measuredangle B \doteq \text{arc cos } 0.708299595$

44° 54′

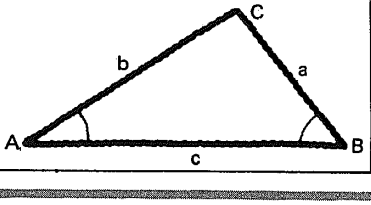
125

Datos:

$a = 65$
$b = 82$
$c = 114$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 34° 02′$
$\measuredangle B = 44° 54′$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



3. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C \doteq$ ⌊_____⌋

De

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{65^2 + 82^2 - 114^2}{2 \cdot 65 \cdot 82}$$

$$\cos C = \frac{4\,225 + 6\,724 - 12\,996}{10\,660}$$

$\cos C = -0.192026266$

Para $0° < \measuredangle C < 180°$

$\measuredangle C \doteq \text{arc cos } (-0.192026266)$

101° 04′

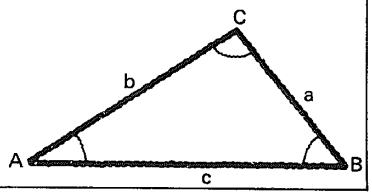
126

Elementos dados:

a = 65
b = 82
c = 114

Elementos calculados:

$\measuredangle A = 34° 02'$
$\measuredangle B = 44° 54'$
$\measuredangle C = 101° 04'$



Verificación:

$\measuredangle A$	$34° 02'$
$\measuredangle B$	$44° 54'$
$\measuredangle C$	$101° 04'$
	$179° 60'$

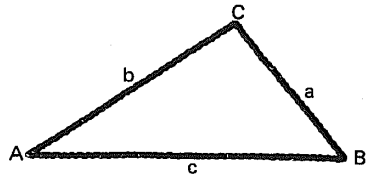
↓

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \mathbf{180°}$

127

En el triángulo ABC:

a = 5.80
b = 8.10
c = 9.96



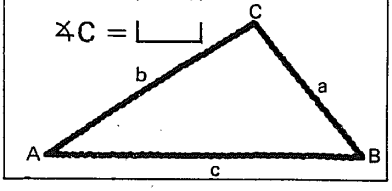
128

Datos:

a = 5.80
b = 8.10
c = 9.96

Incógnitas:

$\measuredangle A =$ ⌊___⌋
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



1. Determinación de $\measuredangle A$.

$\measuredangle A \doteq$ ⌊_____⌋

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{8.10^2 + 9.96^2 - 5.80^2}{2 \cdot 8.10 \cdot 9.96}$$

$$\cos A = \frac{65.61 + 99.2016 - 33.64}{161.352}$$

$\cos A \doteq 0.812953046$

$\measuredangle A \doteq \mathbf{35° 37'}$

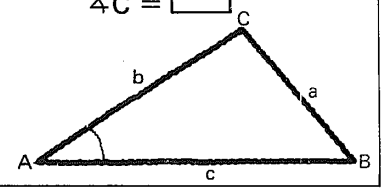
129

Datos:

$a = 5.80$
$b = 8.10$
$c = 9.96$

Incógnitas:

$\measuredangle A \doteq 35^\circ\ 37'$
$\measuredangle B =$ ⌊___⌋
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



2. Determinación de $\measuredangle B$.

$\measuredangle B \doteq$ ⌊_____⌋

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$$

$$\cos B = \frac{5.80^2 + 9.96^2 - 8.10^2}{2 \cdot 5.80 \cdot 9.96}$$

$$\cos B = \frac{33.64 + 99.2016 - 65.61}{115.536}$$

$\cos B \doteq 0.5819104$

$\measuredangle B \doteq$ **54° 25′**

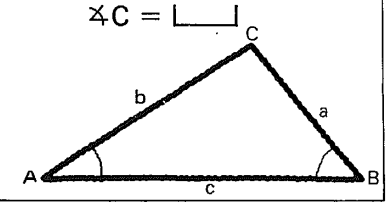
130

Datos:

$a = 5.80$
$b = 8.10$
$c = 9.96$

Incógnitas:

$\measuredangle A = 35^\circ\ 37'$
$\measuredangle B \doteq 54^\circ\ 25'$
$\measuredangle C =$ ⌊___⌋



3. Determinación de $\measuredangle C$.

$\measuredangle C \doteq$ ⌊_____⌋

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

$$\cos C = \frac{5.80^2 + 8.10^2 - 9.96^2}{2 \cdot 5.80 \cdot 8.10}$$

$$\cos C = \frac{33.64 + 65.61 - 99.2016}{93.96}$$

$\cos C \doteq 0.0005151$

$\measuredangle C \doteq 89^\circ\ 58'$

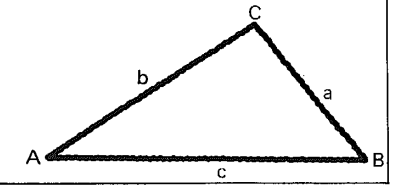
131

Elementos dados:

$a = 5.80$
$b = 8.10$
$c = 9.96$

Elementos calculados:

$\measuredangle A \doteq 35^\circ\ 37'$
$\measuredangle B \doteq 54^\circ\ 25'$
$\measuredangle C \doteq 89^\circ\ 58'$



Verificación:

$\measuredangle A$	$35^\circ\ 37'$
$\measuredangle B$	$54^\circ\ 25'$
$\measuredangle C$	$89^\circ\ 58'$
	$178^\circ\ 120'$

↓

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$ **180°**

5.7.4.1

Práctica adicional
de
resolución de triángulos cualesquiera
dadas las medidas de sus tres lados,
por medio de la ley de los cosenos,
si se considera necesario.

5.7.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

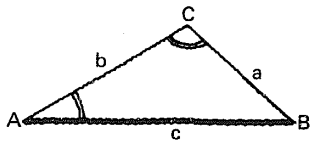
- *aplicar* la ley de los cosenos a la resolución de triángulos cualesquiera, dadas las medidas de sus tres lados.

7.5

Resolución de triángulos cualesquiera. Resumen

132

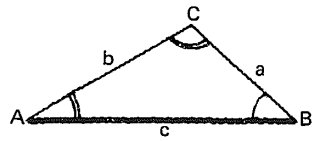
Caso 1. Dadas las medidas de un lado y de dos ángulos interiores.



Procedimiento.

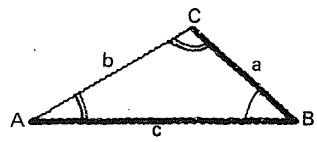
1. Determinación de la medida del ángulo faltante, a partir de:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$



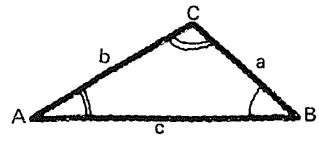
2. Determinación de la medida de uno de los lados faltantes, por ejemplo, **a** , a partir de:

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C}$$



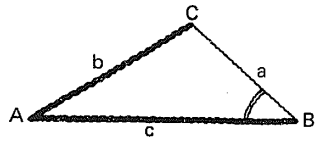
3. Determinación de la medida del otro lado faltante, por ejemplo, **b** , a partir de:

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$



133

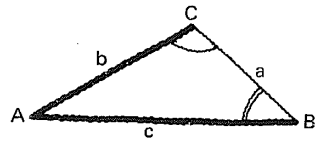
Caso 2. Dadas las medidas de **dos lados y del ángulo** opuesto a uno de ellos **(caso ambiguo).**



Procedimiento.

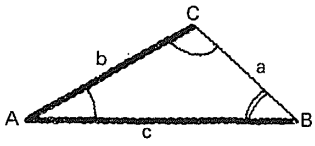
1. Determinación de la medida de uno de los ángulos faltantes (digamos ∡ C) a partir de:

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b}$$



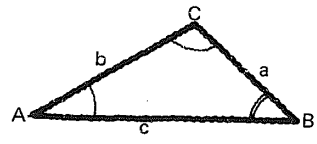
2. Determinación de la medida del otro ángulo, (∡A), sabiendo que:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$



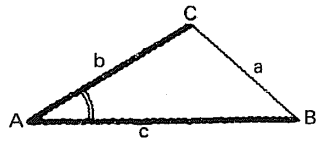
3. Determinación de la medida del lado faltante (**a**), a partir de, por ejemplo:

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$



134

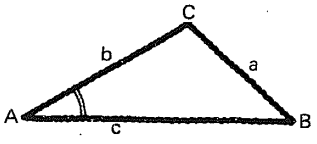
Caso 3. **Dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido.**



Procedimiento.

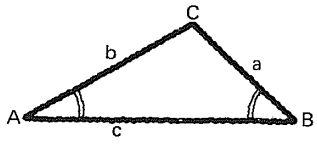
1. Determinación de la medida del lado faltante, (a), a partir de:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$



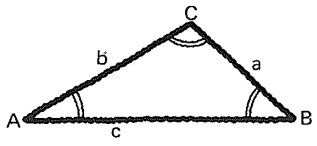
(Continúa en el cuadro siguiente)

2. Determinación de la medida de uno de los ángulos faltantes, por ejemplo, $\measuredangle B$, utilizando:



$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

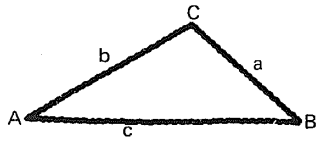
3. Determinación de la medida del otro ángulo, ($\measuredangle C$) a partir de:



$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

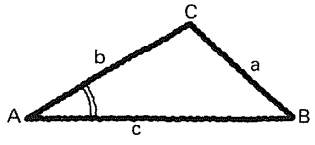
135

Caso 4. Dadas las medidas de los tres lados.



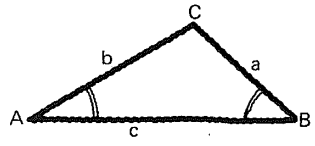
Procedimiento.

1. Determinación de la medida de uno de los ángulos, digamos A, a partir de:



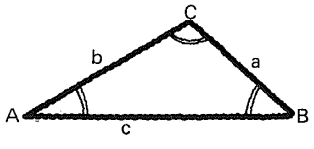
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2. Determinación de la medida de otro de los ángulos, digamos B, a partir de:



$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

3. Determinación de la medida del ángulo faltante, C, a partir de:



$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

136

De la ley de los senos podemos derivar estas expresiones:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}$$

↓

etcétera

que se llaman **fórmulas de Mollweide.**

137

$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$	•	$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}$

Observemos que, en estas expresiones aparecen representados

los 6 elementos de un triángulo,

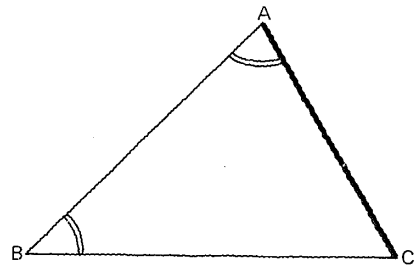
por lo que pueden ser utilizadas para comprobar los resultados obtenidos en la resolución de un triángulo cualquiera.

138

He aquí un triángulo del caso 1, que hemos resuelto al principio de este módulo.

Elementos dados:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$



Elementos calculados:

$\measuredangle C = 60°$
$a \doteq 13.66$
$c \doteq 12.25$

139

Elementos dados:

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$b = 10$

Elementos calculados:

$\measuredangle C = 60°$
$a \doteq 13.66$
$c \doteq 12.25$

Vamos a verificar la solución, utilizando la fórmula de Mollweide:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

Sustituimos datos:

$$\frac{13.66+10}{12.25} = \frac{\cos \frac{1}{2}(75° - 45°)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(60°)}$$

140

Completar la verificación:

$$\frac{13.66 + 10}{12.25} = \frac{\cos \frac{1}{2}(75° - 45°)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(60°)}$$

se verifica/no se verifica

$$1.931428571 \doteq \frac{\cos 15°}{\operatorname{sen} 30°}$$

$$1.931428571 \doteq \frac{0.965925826}{0.5}$$

$$1.931428571 \doteq 1.931851652$$

se verifica.

141

Otro ejemplo.

Elementos dados:

$\measuredangle B = 27° 15'$
$\measuredangle C = 130° 46'$
$a = 125$

Elementos calculados:

$\measuredangle A \doteq 21° 59'$
$b \doteq 152.90$
$c \doteq 252.91$

se verifica/no se verifica

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{125 + 152.90}{252.91} \doteq \frac{\cos \frac{1}{2}(21^\circ\ 59' - 27^\circ\ 15')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(130^\circ\ 46')} \doteq \frac{\cos \frac{1}{2}(-\ 5^\circ\ 16')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(130^\circ\ 46')}$$

$$1.098809853 \doteq \frac{\cos(-\ 2^\circ\ 38')}{\operatorname{sen} 65^\circ\ 23'} \doteq \frac{0.998944009}{0.909114979}$$

$1.098809853 \doteq 1.098809316$

se verifica

142

Un ejemplo más.

Elementos dados:

$a = 15$
$b = 20$
$\measuredangle B = 60^\circ$

Elementos calculados:

$\measuredangle A \doteq 40^\circ\ 30'$
$\measuredangle C \doteq 79^\circ\ 30'$
$c \doteq 22.71$

se verifica/no se verifica

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{15 + 20}{22.71} \doteq \frac{\cos \frac{1}{2}(40^\circ\ 30' - 60^\circ)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(79^\circ\ 30')} \doteq \frac{\cos \frac{1}{2}(-\ 19^\circ\ 30')}{\operatorname{sen}(39^\circ\ 45')}$$

$$1.54117129 \doteq \frac{\cos(-\ 9^\circ\ 45')}{\operatorname{sen} 39^\circ\ 45'}$$

$$1.54117129 \doteq \frac{0.985556059}{0.639439001}$$

$1.54117129 \doteq 1.541282368$

se verifica

143

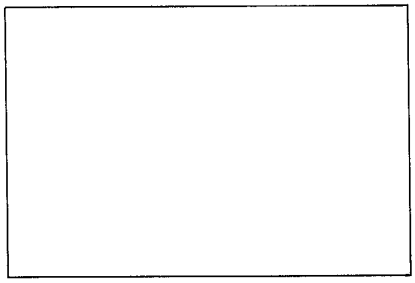
Elementos dados:

$a = 17.50$
$b = 17.50$
$\measuredangle A = 38°$

Elementos calculados:

$\measuredangle B = 38°$
$\measuredangle C = 104°$
$c \doteq 27.58$

Verificación de la solución obtenida para el triángulo ABC.



se verifica/no se verifica

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{17.50 + 17.50}{27.58} \doteq \frac{\cos \frac{1}{2}(38° - 38°)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(104°)}$$

$$1.269035532 \doteq \frac{\cos 0°}{\operatorname{sen} 52°}$$

$$\doteq \frac{1}{0.788010753}$$

$$\doteq 1.269018215$$

se verifica

144

Elementos dados:

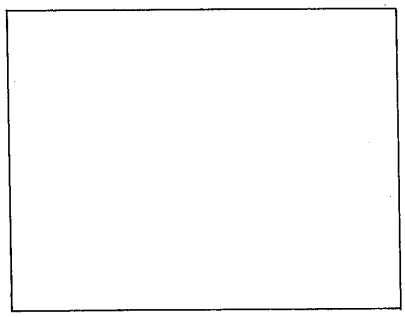
$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Elementos calculados:

$\measuredangle C \doteq 62° 07'$
$\measuredangle A \doteq 72° 53'$
$a \doteq 81.09$

$\measuredangle C' \doteq 117° 53'$
$\measuredangle A' \doteq 17° 07'$
$a' \doteq 24.97$

Verificación de la solución obtenida para el triángulo ABC.



se verifica/no se verifica

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{81.09 + 60}{75} \doteq \frac{\cos 13° 56.5'}{\operatorname{sen} 31° 03.5'}$$

$$\doteq \frac{0.970541526}{0.515910497}$$

$$1.8812 \doteq 1.881220737$$

se verifica

145

Elementos dados:

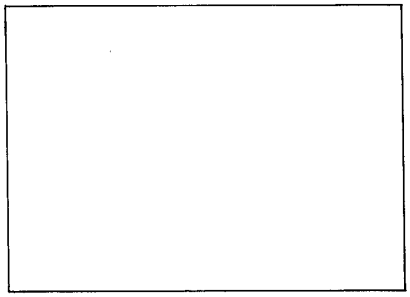
$\measuredangle B = 45°$
$b = 60$
$c = 75$

Elementos calculados:

$\measuredangle C \doteq 62° 07'$
$\measuredangle A \doteq 72° 53'$
$a \doteq 81.09$

$\measuredangle C' \doteq 117° 53'$
$\measuredangle A' \doteq 17° 07'$
$a' \doteq 24.97$

Verificación de la solución obtenida para el triángulo A'BC'.



se verifica/no se verifica

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{24.97 + 60}{75} \doteq \frac{\cos (-13° 56.5')}{\operatorname{sen} 58° 56.5'}$$

$$1.132933333 \doteq \frac{0.970541526}{0.856642492}$$

$$\doteq 1.132959823$$

se verifica

146

Elementos dados:

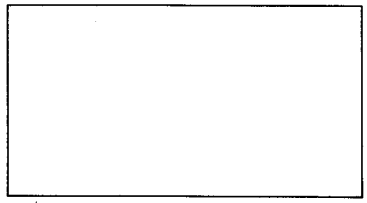
$b = 400$
$c = 500$
$\measuredangle B = 53^\circ\ 08'$

Elementos calculados:

$\measuredangle C = 90^\circ$
$\measuredangle A = 36^\circ\ 52'$
$a = 300$

Solución, obtenida para otro triángulo.

Verificación:



se verifica/no se verifica

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{300+400}{500} \doteq \frac{\cos(-8^\circ\ 08')}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$

$$1.4 \doteq \frac{0.989941517}{0.707106781}$$

$$\doteq 1.399988719$$

se verifica

147

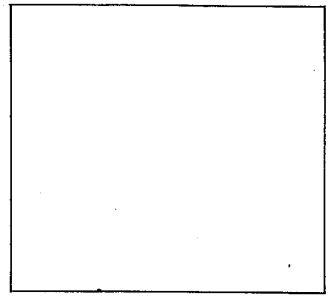
Elementos dados:

$b = 12$
$c = 13$
$\measuredangle A = 25^\circ\ 35'$

Elementos calculados:

$a \doteq 5.62$
$\measuredangle B \doteq 67^\circ\ 13'$
$\measuredangle C \doteq 87^\circ\ 12'$

Verificar esta solución si se considera necesario.



se verifica/no se verifica

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{5.62+12}{13} \doteq \frac{\cos(-20^\circ\ 49')}{\operatorname{sen} 43^\circ\ 36'}$$

$$1.355384615 \doteq \frac{0.93472234}{0.689619543}$$

$$\doteq 1.355417416$$

Se verifica

148

Aquí
tenemos otras fórmulas
que pueden
ser utilizadas para la
resolución de triángulos
cualesquiera y que se conocen
con el nombre de

ley de las tangentes.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A + B)}{\tan \frac{1}{2}(A - B)}$$

etcétera.

5.7.5.1

Práctica de resolución
de triángulos cualesquiera,
de los cuatro
casos estudiados,
comprobando los resultados
por medio de alguna de las
fórmulas de Mollweide
o por la ley de las tangentes,
si se considera necesario.

5.7.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un triángulo cualquiera, dadas las medidas de tres de sus elementos (no los tres ángulos), comprobando los resultados por alguna de las fórmulas de Mollweide o por la ley de las tangentes.

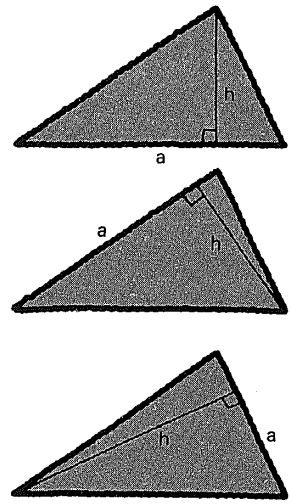
7.6

Área de una región triangular

149

Sabemos que el área de una región triangular cualquiera, es igual al semiproducto de las medidas de cualquiera de los lados y de su correspondiente altura:

$$A = \frac{ah}{2}$$



150

Si se conocen las medidas de los catetos de un

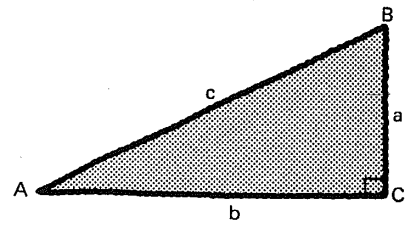
triángulo rectángulo,

el área de la región triangular correspondiente puede ser expresada como

el semiproducto de las medidas de los catetos.

Simbólicamente:

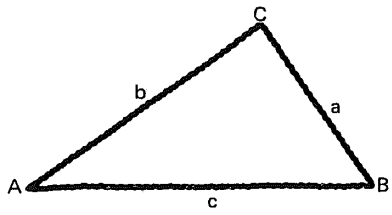
$A = \square$



$\frac{ab}{2}$

151

Consideremos uno de los triángulos previamente resueltos.
Se conocen las medidas de sus seis elementos.
Necesitamos calcular una cualquiera de las alturas para estar en condiciones de determinar su área(*).



(*) Por razones de brevedad usaremos la expresión: "área de un triángulo" como sinónimo de "área de una región triangular".

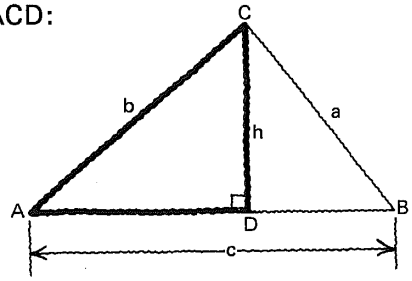
152

En el triángulo rectángulo ACD:

$\frac{h}{b} =$ [ ]

de donde:

$h =$ [ ]



sen A

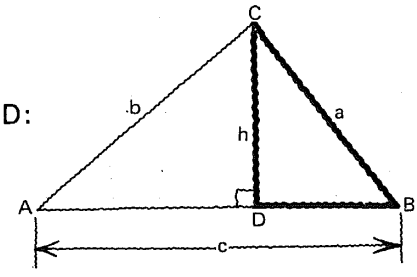
b sen A

153

De manera similar,
en el triángulo rectángulo BCD:

[ ]

$h =$ [ ]



$\frac{h}{a} =$ sen B

$h =$ a sen B

154

Área del triángulo ABC:

$$A = \frac{ch}{2}$$

pero, como:

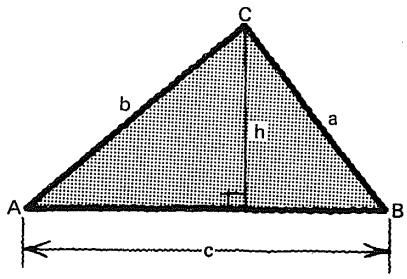
$$h = b \operatorname{sen} A$$

o

$$h = a \operatorname{sen} B$$

entonces:

$$A = \square = \square$$



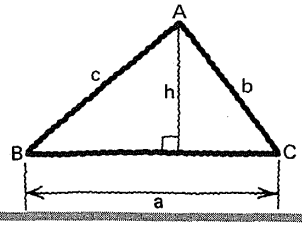
$$\frac{c\,b \operatorname{sen} A}{2} = \frac{c\,a \operatorname{sen} B}{2}$$

155

Ejemplo;
en el triángulo ABC:

$a = 13.66$ cm
$b = 10$ cm
$c = 12.25$ cm

$\measuredangle A = 75°$
$\measuredangle B = 45°$
$\measuredangle C = 60°$



expresión general

$$h = \square$$

$$h \doteq \square \text{ cm}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

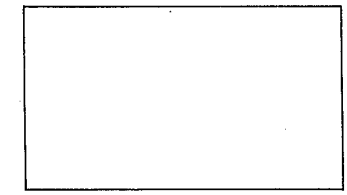
$c \operatorname{sen} B$	ó	$b \operatorname{sen} C$
sustituyendo datos:		
$12.25 \operatorname{sen} 45°$	ó	$10 \operatorname{sen} 60°$
12.25×0.707106781	ó	10×0.866025403
↓		↓
8.66	ó	**8.66**

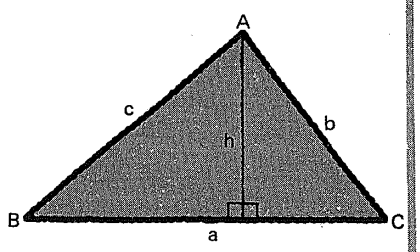
156

Área ▲ ABC:

expresión general

$A =$ ⌊ ⌋





$A \doteq$ ⌊ ⌋ cm^2

$$\frac{ah}{2}$$

$$\frac{13.66 \times 8.66}{2}$$

↓

59.15 cm^2

5.7.6.1

Práctica adicional de determinación del área de un triángulo cualquiera, mediante el cálculo de la altura correspondiente a uno de los vértices, si se considera necesario.

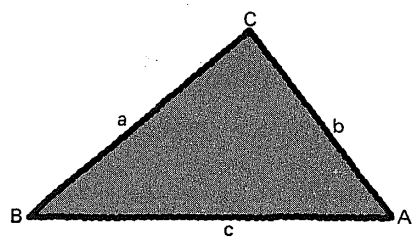
157

Herón de Alejandría obtuvo, hace unos dos mil años, una expresión* para calcular el

área de un triángulo,

a partir de las medidas de

sus tres lados.

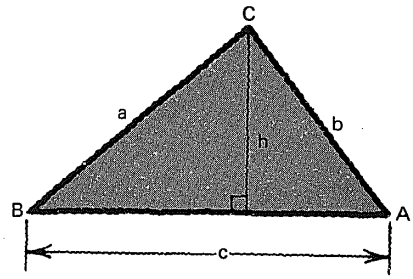


* Ver cuadros siguientes, si se quiere estudiar la deducción de tal fórmula.

158

De acuerdo con lo que sabemos, el área del triángulo ABC es:

$A =$ [ ]



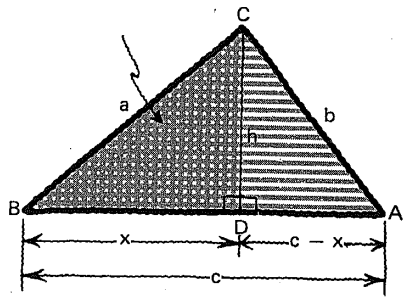
$\frac{ch}{2}$

159

$A = \frac{ch}{2}$

En el triángulo rectángulo BCD y según Pitágoras:

[ ]



$a^2 = h^2 + x^2$

o bien

$h^2 = a^2 - x^2$

160

$h^2 = a^2 - x^2$

de donde:

$h =$ [ ]

$h < 0$ no satisface los requerimientos del problema.

$\sqrt{a^2 - x^2}$

161

$$A = \frac{ch}{2}$$

$$h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Por sustitución: $A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ ——— (1)

162

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ——— (1)}$$

Es necesario, ahora, expresar **x** en términos de los lados del triángulo, es decir:

$$x = f(a, b, c)$$

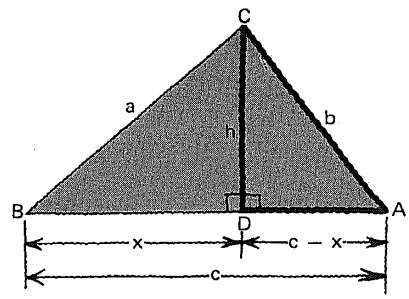
163

Para el triángulo rectángulo BCD; hemos encontrado:

$h^2 = a^2 - x^2$

Similarmente, para el triángulo rectángulo ACD:

$h^2 =$ [ ]



$b^2 - (c - x)^2$

164

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (1)$$

$$h^2 = a^2 - x^2 \quad (2)$$

$$h^2 = b^2 - (c - x)^2 \quad (3)$$

Por transitividad, en (2) y (3):

[ ] (4)

$a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$

165

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2 \quad (4)$$

Expresión equivalente obtenida al desarrollar el "cuadrado del binomio" del segundo miembro:

[ ] (5)

$a^2 - x^2 = b^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$

o bien:

$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$

166

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2 \quad (5)$$

Reduciendo términos semejantes:

[ ] (6)

$a^2 = b^2 - c^2 + 2cx$

167

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2\,cx \qquad (6)$$

de donde:

$$x = \boxed{\qquad\qquad} \qquad (7)$$

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c}$$

168

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c} \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (1):

$$\boxed{\qquad\qquad} \qquad (8)$$

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c}\right)^2}$$

169

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c}\right)^2} \qquad (8)$$

Por factorización del radicando, obtenemos la expresión (9):

(Recordemos que:

$$x^2 - y^2 = \boxed{\qquad\qquad})$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \qquad (9)$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

- $(x + y)(x - y)$

- $A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]\left[a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]}$

170

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]\left[a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]} \quad (9)$$

Expresamos ahora como "fracciones racionales comunes" cada una de las expresiones mixtas contenidas entre corchetes:

(10)

Respuesta en el cuadro siguiente

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]\left[\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2c}\right]}$$

171

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right]\left[\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2c}\right]} \quad (10)$$

Ordenando y reagrupando los términos en los numeradores de las expresiones contenidas entre corchetes, obtenemos:

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2}{2c}\right]\left[\frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2c}\right]} \quad (11)$$

Ahora, factorizando los trinomios entre paréntesis:

_____ (12)

Respuesta en el cuadro siguiente

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{(a + c)^2 - b^2}{2c}\right]\left[\frac{b^2 - (a - c)^2}{2c}\right]}$$

172

$$A = \frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{(a + c)^2 - b^2}{2c}\right]\left[\frac{b^2 - (a - c)^2}{2c}\right]} \quad (12)$$

Introducimos el coeficiente $\frac{c}{2}$ en el radical y simplificamos el resultado:

_____ (13)

_____ (14)

Respuesta en el cuadro siguiente

- $A = \sqrt{\frac{c^2}{4}\left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}\right]\left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}\right]}$

- $A = \sqrt{\frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{16}}$

173

$$A = \sqrt{\frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{16}} \quad (14)$$

Factorizamos las expresiones entre corchetes:

(15)

Respuesta en el cuadro siguiente

$$A = \sqrt{\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{16}}$$

174

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{16}}$$ (15)

Ahora bien:

llamemos s al semiperímetro del triángulo.
Es decir:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Entonces: $a + b + c =$ [ ]

2s

175

¡Atención!

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{16}}$$ (15)

$a + b + c = 2s$ ——— (16)

Si → $a + b + c = 2s$,
restando 2b a ambos miembros:

$$a + b + c - 2b = 2s - 2b$$
$$a + c - b = 2s - 2b$$
$$a + c - b = 2(s - b)$$ ——— (17)

176

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{16}}$$ (15)

$a + b + c = 2s$ ——— (16)

$a + c - b = 2(s - b)$ ——— (17)

Similarmente podemos obtener:

$a + b - c =$ [ ] ——— (18)

2(s − c)

$b + c - a =$ [ ] ——— (19)

2(s − a)

177

$$A = \sqrt{\frac{(a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a)}{16}} \quad (15)$$

$$a + b + c = 2s \quad (16)$$

$$a + c - b = 2(s - b) \quad (17)$$

$$a + b - c = 2(s - c) \quad (18)$$

$$b + c - a = 2(s - a) \quad (19)$$

Sustituyendo (16), (17), (18) y (19) en (15), tenemos:

$$\square \quad (16)$$

$$A = \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - a)}{16}}$$

178

$$A = \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - a)}{16}} \quad (16)$$

Por simplificación del radicando, finalmente obtenemos:

$$\square \quad (17)$$

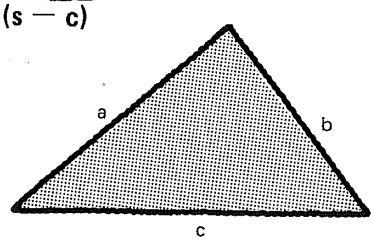
$$A = \sqrt{s(s - b)\,(s - c)\,(s - a)}$$

179

La expresión:

$$A = \sqrt{s(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

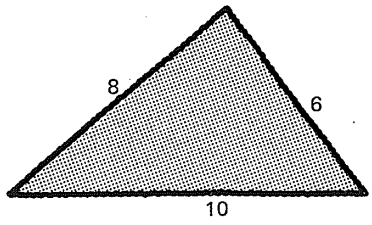
se conoce con el nombre de **fórmula de Herón de Alejandría** y nos permite calcular el área de un triángulo a partir de las medidas de sus tres lados.



180

Ejemplo de aplicación.
Se requiere determinar el área del triángulo representado.
Empezamos por escribir la fórmula:

$A = \square$



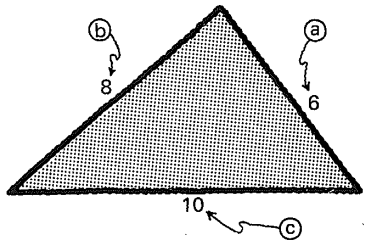
$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

181

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \square$

$(s-a) = \square$
$(s-b) = \square$
$(s-c) = \square$



$$\frac{6+8+10}{2} = 12$$

$12 - 6 = 6$
$12 - 8 = 4$
$12 - 10 = 2$

182

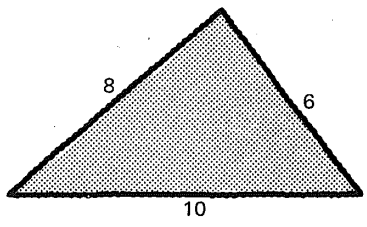
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = 12$

$s - a = 6$

$s - b = 4$

$s - c = 2$



$A = \square = \square = \square$

$\sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = \mathbf{24}$

5.7.6.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

5.7.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el área de una región triangular dada, mediante el cálculo de una de las alturas;
- *obtener* la fórmula de Herón de Alejandría para el cálculo del área de una región triangular;
- *aplicar* la fórmula de Herón de Alejandría a la determinación del área de una región triangular dada.

7.7

Resolución de triángulos
cualesquiera.
Aplicación.

5.7.7.1

Práctica de
aplicación de los
procedimientos de
resolución de triángulos cualesquiera
y cálculo de áreas de regiones triangulares
a problemas prácticos,
si se considera necesario.

5.7.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los procedimientos de resolución de triángulos cualesquiera y cálculo de áreas de regiones triangulares, a problemas prácticos.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100